CHƯƠNG 5 ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA – QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ các định trên khoảng $\left(a;b\right)$ và $x_0\in\left(a;b\right)$.

Giới hạn hữu hạn nếu có của tỉ số $\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$ khi $x\to x_0$ được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0, kí hiệu $f'\left(x_0\right)$ hay $y'\left(x_0\right)$. Như vậy, ta có:

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

2. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1. Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

3. Ý nghĩa của đạo hàm

a) **Ý nghĩa hình học:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm $M\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ có dạng: $y=k\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$ với $k=f'\left(x_0\right)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

b) **Ý nghĩa vật lý:**

– Vận tốc tức thời: $v\left(t\right)=s'\left(t\right)$.

– Gia tốc tức thời: $a\left(t\right)=v'\left(t\right)$.

– Cường độ dòng điện tức thời: $I\left(t\right)=Q'\left(t\right)$.

4. Đạo hàm trên khoảng: Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $\left(a;b\right)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

☑_ DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

PHƯƠNG PHÁP:

- Cần nhớ công thức: $f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$
- Phương pháp tính giới hạn của hàm số

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^2+x+1$. Tính $f'\left(2\right)$?

Lời giải

Ta có $f'\left(2\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x+1-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(2x+5\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(2x+5\right)=9$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=x^3-2x+1$. Tính $y'\left(2\right)$?

Lời giải

Ta có $y'\left(2\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{y\left(x\right)-y\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x+1-0}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x-1\right)=1$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2x+1}$. Tính $f'\left(1\right)$?

Lời giải

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. Tính $y'(3)$?

Lời giải

Ta có $y'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{y(x)-y(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{5}{6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-21}{6(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7}{6(x+3)}=\dfrac{7}{36}$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

1. Cho $f(x)=x^3+x-2$. Tính $f'(-2)$? **ĐS:** $f'(-2)=13$

2. Cho $y=\sqrt{3-2x}$. Tính $y'(-3)$? **ĐS:** $y'(-3)=-\dfrac{1}{3}$

3. Cho $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tính $f'(2)$? **ĐS:** $f'(2)=-3$

☑_LỜI GIẢI

1. Ta có $f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+x-2-(-12)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+5\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-2x+5\right)=13$.

2. Ta có $y'(-3)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{y(x)-y(1)}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3-2x}-3}{x+3}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-6-2x}{(x+3)\left(\sqrt{3-2x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-2}{\sqrt{3-2x}+3}=-\dfrac{1}{3}$.

3. Ta có $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+6}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3}{2(x-1)}=-3$.

☑_ DẠNG 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM VÀ BẢNG ĐẠO HÀM

♦ **Quy tắc tính đạo hàm**

① $(u+v-w)'=u'+v'-w'$

② $(u.v)'=u'v+v'u$

③ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

④ $(k.u)'=k.u'\ (k\in\mathbb{R})$

♦ **Bảng đạo hàm**

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
♦ $(C)'=0\ (C\in\mathbb{R})$ ♦ $\left(x^n\right)'=n.x^{n-1}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	♦ $\left(u^n\right)'\ n.u^{n-1}.u'\ (n\in\mathbb{N}^*)$

♦ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$ ♦ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	♦ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u>0)$ ♦ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(u \neq 0)$

o Công thức nhanh

♦ $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

♦ $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \dfrac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}$

♦ $\left(\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$ (Tích huyền trừ tích sắc)

Loại 1. Làm quen nhóm công thức $(x^n)' = n.x^{n-1}$ và $(u.v)' = u'v + v'u$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 2.2x = 4x^3 - 4x$$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 5x^2(3x-1)$.

Lời giải

$$y' = \left[5x^2(3x-1)\right]' = \left(5x^2\right)'.(3x-1)' + 5x^2.(3x-1)' = 10x.(3x-1) + 5x^2.3 = 45x^2 - 10x$$

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y = -2x^4 + 4x^2 - 3x + 1$. **ĐS:** $-8x^3 + 8x - 3$.

2. $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$. **ĐS:** $3x^2 - 6x + 1$.

3. $y = \dfrac{1}{2}x^5 + x^4 - x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x - 5$. **ĐS:** $\dfrac{5}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 4$.

4. $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - \dfrac{1}{2}x^4$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y = \dfrac{1}{5}mx^5 - 2x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + m^2 - 1$. **ĐS:** $mx^4 - 8x^3 + x^2$.

2. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{3}x^2 + m - 1$. **ĐS:** $x^3 - x^2 + x$.

3. $y = 3x^3 + 2(m-1)x^2 + x + m^2 - 1$. **ĐS:** $9x^2 + 4(m-1)x + 1$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y = (x^2 + x)(3 - x^2)$. **ĐS:** $-4x^3 - 3x^2 + 6x + 3$.

2. $y = (2x-1)^2(2x+1)^2$. **ĐS:** $16x^2 + 4$.

3. $y = x(2x-1)(3x+2)$. **ĐS:** $18x^2 + 2x - 2$.

3. Lời giải

Bài 1. **1.** $y' = -2.4x^3 + 4.2x - 3 = -8x^3 + 8x - 3$.

2. $y' = 3x^2 - 3.2x + 1 = 3x^2 - 6x + 1$.

3. $y' = \frac{1}{2}.5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}.2x + 4 = \frac{5}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 4$.

4. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - \frac{1}{2}.4x^3 = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

Bài 2. **1.** $y' = \frac{1}{5}.5mx^4 - 2.4x^3 + \frac{1}{3}.3x^2 = mx^4 - 8x^3 + x^2$.

2. $y' = \frac{1}{4}.4x^3 - \frac{1}{3}.3x^2 + \frac{1}{2}.2x = x^3 - x^2 + x$.

3. $y' = 3.3x^2 + 2.2(m-1)x + 1 = 9x^2 + 4(m-1)x + 1$.

Bài 3. **1.** $y' = \left[\left(x^2+x\right)\left(3-x^2\right)\right]' = \left(x^2+x\right)'\left(3-x^2\right) + \left(x^2+x\right).\left(3-x^2\right)'$

$= (2x+1)\left(3-x^2\right) + \left(x^2+x\right)(-2x) = -4x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

2. $y' = \left[(2x-1)^2(2x+1)^2\right]' = \left[(2x-1)\right]'(2x+1)^2 + (2x-1)^2.\left[(2x+1)^2\right]'$

$= 2.(2x+1)^2 + (2x-1)^2.2 = 16x^2 + 4$.

3. $y' = \left[x(2x-1)(3x+2)\right]' = x'.\left[(2x-1)(3x+2)\right] + x.\left[(2x-1)(3x+2)\right]'$

$= 1.\left[(2x-1)(3x+2)\right] + x.\left[(2x-1)'.(3x+2) + (2x-1).(3x+2)'\right]$

$= 1.\left[6x^2 + x - 2\right] + x.\left[2.(3x+2) + (2x-1).3\right]$

$= 6x^2 + x - 2 + x\left[12x+1\right] = 6x^2 + x - 2 + 12x^2 = 18x^2 + 2x - 2$.

Loại 2. Làm quen nhóm công thức $\left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \left(x^7 + x\right)^2$.

Lời giải

$y' = 2\left(x^7+x\right).\left(7x^6+1\right) = 2\left(7x^{13} + 8x^7 + x\right) = 14x^{13} + 16x^7 + 2x.$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)(2x+1)^3$

Lời giải

$y' = \left[\left(x^2-2x+3\right)(2x+1)^3\right]' = \left(x^2-2x+3\right)'.(2x+1)^3 + \left(x^2-2x+3\right).\left[(2x+1)^3\right]'$

$= (2x-2).(2x+1)^3 + \left(x^2-2x+3\right).\left[3(2x+1)^2.2\right] = (2x-2).(2x+1)^3 + 6\left(x^2-2x+3\right)(2x+1)^2.$

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tìm đạo hàm của hàm số sau

1. $y = \left(2x^3 - 3x^2 - 6x + 1\right)^2$. **ĐS:** $25x^5 - 60x^4 - 60x^3 + 120x^2 + 60x - 12$

2. $y = \left(x^7 + 3x^4 + 2\right)^{10}$. **ĐS:** $10\left(x^7 + 3x^4 + 2\right)^9.\left(7x^6 + 12x^3\right)$

3. $y = \left(x^4 - 2x^2 + x - 1\right)^2$. **ĐS:** $8x^7 - 24x^5 + 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 10x - 2$

4. $y=\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}\left(x+3\right)^5$.

ĐS: $10\left(12x^2-10x+3\right)\left(x+5\right)^5\left(3x-5x^2+4x^3\right)^9+5\left(x+3\right)^4\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}$

3. Lời giải

Bài 1. **1.** $y'=2\left(2x^3-3x^2-6x+1\right).\left(6x^2-6x-6\right)=2\left(12x^5-30x^4-30x^3+60x^2+30x-6\right)$

$=24x^5-60x^4-60x^3+120x^2+60x-12$.

2. $y'=10\left(x^7+3x^4+2\right)^9.\left(7x^6+12x^3\right)$.

3. $y'=2\left(x^4-2x^2+x-1\right).\left(4x^3-4x+1\right)=2\left(4x^7-12x^5+5x^4+4x^3-6x^2+5x-1\right)$

$=8x^7-24x^5+10x^4+8x^3-12x^2+10x-2$.

4.

$$y'=\left[\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}.\left(x+3\right)^5\right]'=\left[\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}\right]'.\left(x+3\right)^5+\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}.\left[\left(x+3\right)^5\right]'$$

$$=\left[10\left(3x-5x^2+4x^3\right)^9.\left(3-10x+12x^2\right)\right].\left(x+3\right)^5+\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}.\left[5\left(x+3\right)^4.1\right]$$

$$=10\left(12x^2-10x+3\right)\left(x+3\right)^5\left(3x-5x^2+4x^3\right)^9+5\left(x+3\right)^4\left(3x-5x^2+4x^3\right)^{10}.$$

Loại 3. Làm quen nhóm công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ và $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

- Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{\left(2x+1\right)'\left(x+1\right)-\left(x+1\right)'\left(2x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{2\left(x+1\right)-\left(2x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\frac{2.1-1.1}{\left(x+1\right)^2}=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2mx+1}{x+m}$.

Lời giải

- Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{\left(2mx+1\right)'\left(x+m\right)-\left(x+m\right)'\left(2mx+1\right)}{\left(x+m\right)^2}=\frac{2m\left(x+m\right)-1.\left(2mx+1\right)}{\left(x+m\right)^2}=\frac{2m^2-1}{\left(x+m\right)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\frac{2m.m-1.1}{(x+m)^2}=\frac{2m^2-1}{(x+m)^2}.$$

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\dfrac{2x-1}{4x-3}$. **ĐS:** $\dfrac{-2}{(4x-3)^2}$.

2. $y=\dfrac{3}{2x+1}$. **ĐS:** $\dfrac{-6}{(2x+1)^2}$.

3. $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$. **ĐS:** $\dfrac{5}{(1-3x)^2}$.

4. $y=\dfrac{1-2x}{x+5}$. **ĐS:** $\dfrac{-11}{(x+5)^2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$. **ĐS:** $\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

2. $y=\dfrac{(2m+1)x-2(m+1)}{mx+m^2-1}$. **ĐS:** $\dfrac{2m^3+3m^2-1}{(mx+m^2-1)^2}$.

3. Lời giải

Bài 1. **1.** - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(2x-1)'(4x-3)-(4x-3)'(2x-1)}{(4x-3)^2}=\frac{2(4x-3)-4.(2x-1)}{(4x-3)^2}=\frac{-2}{(4x-3)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\frac{2.(-3)-4.(-1)}{(4x-3)^2}=\frac{-2}{(4x-3)^2}.$$

2. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(3)'.(2x+1)-(2x+1)'.3}{(2x+1)^2}=\frac{0.(2x+1)-2.3}{(2x+1)^2}=\frac{-6}{(2x+1)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$y'=\dfrac{0.1-2.3}{(2x+1)^2}=\dfrac{-6}{(2x+1)^2}$.

3. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\dfrac{(2x+1)'.(1-3x)-(1-3x)'.(2x+1)}{(1-3x)^2}=\dfrac{2.(1-3x)+3.(2x+1)}{(1-3x)^2}=\dfrac{5}{(1-3x)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$y'=\dfrac{2.1+3.1}{(1-3x)^2}=\dfrac{5}{(1-3x)^2}$.

4. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\dfrac{(1-2x)'.(x+5)-(x+5)'.(1-2x)}{(x+5)^2}=\dfrac{-2.(x+5)-1.(1-2x)}{(x+5)^2}=\dfrac{-11}{(x+5)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$y'=\dfrac{-2.5-1.1}{(1-3x)^2}=\dfrac{-11}{(x+5)^2}$.

Bài 2. **1.** - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\dfrac{(mx+4)'.(x+m)-(x+m)'.(mx+4)}{(x+m)^2}=\dfrac{m.(x+m)-1.(mx+4)}{(x+m)^2}=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$y'=\dfrac{m.m-4.1}{(x+m)^2}=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

2. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được

$$y'=\dfrac{\left[(2m+1)x-2(m+1)\right]'.\left(mx+m^2-1\right)-\left(mx+m^2-1\right)'.\left[(2m+1)x-2(m+1)\right]}{\left(mx+m^2-1\right)^2}$$

$$=\dfrac{(2m+1).\left(mx+m^2-1\right)-m.\left[(2m+1)x-2(m+1)\right]}{\left(mx+m^2-1\right)^2}=\dfrac{2m^3+3m^2-1}{\left(mx+m^2-1\right)^2}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\frac{(2m+1)(m^2-1)+2(m+1)m}{(mx+m^2-1)^2}=\frac{2m^3+3m^2-1}{(mx+m^2-1)^2}.$$

Loại 4. Làm quen với nhóm công thức $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ và

$$\left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+4}$.

Lời giải

- Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(x^2+x+1)'(2x^2-x+4)-(2x^2-x+4)'(x^2+x+1)}{(2x^2-x+4)^2}$$

$$=\frac{(2x+1)(2x^2-x+4)-(4x-1)(x^2+x+1)}{(2x^2-x+4)^2}=\frac{-3x^2+4x+5}{(2x^2-x+4)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm):

$$y'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\frac{(-1.1-2.1)x^2+2(1.4-2.1)x+(1.4+1.1)}{(2x^2-x+4)^2}=\frac{-3x^2+4x+5}{(2x^2-x+4)^2}.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2-2(m-1)x+m+3}{x-1}$.

Lời giải

- Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(x^2-2(m-1)x+m+3)'(x-1)-(x-1)'(x^2-2(m-1)x+m+3)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-2(m-1))(x-1)-(x^2-2(m-1)x+m+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+m-5}{(x-1)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm):

$$y'=\begin{pmatrix}1 & -2(m-1) & m+3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{x^2-2x+m-5}{(x-1)^2}.$$

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$. **ĐS**: $\dfrac{-4x+2}{\left(2x^2-x+4\right)^2}$.

2. $y=\dfrac{x^2-3x+7}{2x-5}$. **ĐS**: $\dfrac{2x^2-10x+1}{\left(2x-5\right)^2}$.

3. $y=\dfrac{2x-5}{x^2+x+2}$. **ĐS**: $\dfrac{-2x^2+10x+9}{\left(x^2+x+2\right)^2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x^2+(m+2)x-3m+1}{x-1}$. **ĐS**: $\dfrac{2x^2-4x+2m-3}{(x-1)^2}$.

3. Lời giải

Bài 1. **1.** - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{\left(1+x-x^2\right)'\left(1-x+x^2\right)-\left(1-x+x^2\right)'\left(1+x-x^2\right)}{\left(1-x+x^2\right)^2}$$

$$=\frac{(1-2x)\left(1-x+x^2\right)-(-1+2x)\left(1+x-x^2\right)}{\left(1-x+x^2\right)^2}=\frac{-4x+2}{\left(1-x+x^2\right)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{(-1.(-1)-1.1)x^2-2(1.1-1.1)x+(1.1+1.1)}{\left(2x^2-x+4\right)^2}.$$

2. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{\left(x^2-3x+7\right)'(2x-5)-(2x-5)'\left(x^2-3x+7\right)}{(2x-5)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(2x-5)-2\left(x^2-3x+7\right)}{(2x-5)^2}=\frac{2x^2-10x+1}{(2x-5)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\begin{pmatrix}1 & -3 & 7\\ 0 & -1 & -5\end{pmatrix}=\frac{2x^2-10x+1}{(2x-5)^2}.$$

3. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(2x-5)'\left(x^2+x+2\right)-\left(x^2+x+2\right)'(2x-5)}{\left(x^2+x+2\right)^2}=\frac{-2x^2+10x+9}{\left(x^2+x+2\right)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\begin{pmatrix}0 & 2 & -5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{-2x^2+10x+9}{\left(x^2+x+2\right)^2}.$$

Bài 2. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{\left(2x^2+(m+2)x-3m+1\right)'(x-1)-(x-1)'\left(2x^2+(m+2)x-3m+1\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(4x+m+2)(x-1)-\left(2x^2+(m+2)x-3m+1\right)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+2m-3.}{(x-1)^2}$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & m+2 & -m+1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2x^2-4x+2m-3}{(x-1)^2}.$$

Loại 5. Làm quen nhóm công thức $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ và $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1}{x-1}+1$. **2.** $y = x-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^4+6x^3-1}$. **3.** $y = \frac{1}{3x^2+2x}$.

Lời giải

1. $y' = -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}+0 = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

2. $y' = 1+\frac{9}{x^2}+2.\frac{\left(x^4+6x^3-1\right)'}{\left(x^4+6x^3-1\right)^2} = 1+\frac{9}{x^2}+2.\frac{\left(4x^3+18x^2\right)}{\left(x^4+6x^3-1\right)^2}$.

3. $y' = -\frac{\left(3x^2+2x\right)'}{\left(3x^2+2x\right)^2} = -\frac{6x+2}{\left(3x^2+2x\right)^2}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1}{(2x-5)^2}$. **2.** $y = \frac{4}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$. **3.** $y = \frac{1}{x}-\frac{2}{\left(3x-x^2\right)^5}$.

Lời giải

1. $y' = -\frac{\left[(2x-5)^2\right]'}{(2x-5)^4} = -\frac{2(2x-5).(2x-5)'}{(2x-5)^4} = -\frac{4}{(2x-5)^3}$.

2. $y' = -4.\frac{\left[\left(x^2-2x+5\right)^2\right]'}{\left(x^2-2x+5\right)^4} = -4.\frac{2\left(x^2-2x+5\right).\left(x^2-2x+5\right)'}{\left(x^2-2x+5\right)^4}$

$$= -\frac{16(x-1)}{\left(x^2-2x+5\right)^3} = \frac{16(1-x)}{\left(x^2-2x+5\right)^3}$$

3. $y' = -\frac{1}{x^2}2.\frac{\left[\left(3x-x^2\right)^5\right]'}{\left(3x-x^2\right)^{10}} = -\frac{1}{x^2}+2\frac{5\left(3x-x^2\right)^4.\left(3x-x^2\right)'}{\left(3x-x^2\right)^{10}} = \frac{10(3-2x)}{\left(3x-x^2\right)^6}-\frac{1}{x^2}$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số: $y=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{2\left(2x-1\right)^6}$.

Lời giải

$$y'=-3.\frac{\left(x-1\right)'}{\left(x-1\right)^2}-5.\frac{\left[2\left(2x-1\right)^6\right]'}{4\left(2x-1\right)^{12}}=-3.\frac{1}{\left(x-1\right)^2}-5.\frac{2.6\left(2x-1\right)^5.\left(2x-1\right)'}{4\left(2x-1\right)^{12}}=-\frac{3}{\left(x-1\right)^2}-\frac{30}{\left(2x-1\right)^7}$$

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\dfrac{1}{x+1}-2x$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}-2$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$. **ĐS:** $-\dfrac{2}{\left(x-1\right)^3}$.

3. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+1}$. **ĐS:** $\dfrac{3-2x}{\left(x^2-3x+1\right)^2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm củ các hàm số sau

1. $y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}$. **ĐS:** $\dfrac{5(5-2x)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$.

2. $y=\dfrac{3}{\left(2x^2-8x\right)^4}-2x^2$. **ĐS:** $\dfrac{3(2-x)}{\left(x^2-4x\right)^5}-4x$.

3. $y=x-\dfrac{3}{\left(x^2-3x\right)^{10}}$. **ĐS:** $1-\dfrac{30\left(2x-3\right)}{\left(x^2-3x\right)^{11}}$.

4. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(2x+5\right)^5}$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{10}{\left(2x-1\right)^6}$.

3. Lời giải

Bài 1. **1.** $y'=-\dfrac{\left(x+1\right)'}{\left(x+1\right)^2}-2=-\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}-2$.

2. $y'=\left[\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}\right]'=-\dfrac{\left[\left(x-1\right)^2\right]'}{\left(x-1\right)^4}=-\dfrac{2(x-1).(x-1)'}{(x-1)^4}=-\dfrac{2}{\left(x-1\right)^3}$.

3. $y'=-\dfrac{\left(x^2-3x+1\right)'}{\left(x^2-3x+1\right)^2}=-\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+1\right)^2}=\dfrac{3-2x}{\left(x^2-3x+1\right)^2}$

Bài 2. **1.** $y'=\dfrac{\left[\left(x^2-x+1\right)^5\right]'}{\left(x^2-x+1\right)^{10}}=-\dfrac{5\left(x^2-x+1\right)^4.\left(x^2-x+1\right)'}{\left(x^2-x+1\right)^{10}}=-\dfrac{5(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^6}=\dfrac{5(1-2x)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$.

2. $y'=-3\dfrac{\left[\left(2x^2-8x\right)^4\right]'}{\left(2x^2-8x\right)^8}-4x=-3.\dfrac{4\left(2x^2-8x\right)^3.\left(2x^2-8x\right)'}{\left(2x^2-8x\right)^8}=\dfrac{3(2-x)}{\left(x^2-4x\right)^5}-4x$

3. $y'=1-3\dfrac{\left[\left(x^2-3x\right)^{10}\right]'}{\left(x^2-3x\right)^{20}}=1-3.\dfrac{10\left(x^2-3x\right)^9.\left(x^2-3x\right)'}{\left(x^2-3x\right)^{20}}=1-\dfrac{30(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^{11}}$.

4. $y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\left(x^2\right)'}{x^4}-\dfrac{\left[\left(2x-1\right)^5\right]'}{\left(2x-1\right)^{10}}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{10}{\left(2x-1\right)^6}$

Loại 6. Làm quen nhóm công thức $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ và kết hợp một số công thức khác

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=2x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$. **2.** $y=3x^2-4\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}-1$. **3.** $y=\sqrt{x^2+6x+7}$.

Lời giải

1. $y'=8x^3-x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2. $y'=6x-4.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2.\dfrac{1}{x^2}=6x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}$.

3. $y'=\dfrac{\left(x^2+6x+7\right)'}{2\sqrt{x^2+6x+7}}=\dfrac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+7}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}$.

2. Bài tập áp dụng

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}$. **ĐS:** $5x^4-12x^2+2-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

2. $y=\sqrt{x^2-2x-8}$. **ĐS:** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$.

3. $y=\sqrt{4x-x^2}$. **ĐS:** $\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\sqrt{x+4}-\sqrt{4-x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$

2. $y=x-2\sqrt{x^2+3x+3}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}-2x-3}{\sqrt{x^2+3x+3}}$

3. $y=2x-\sqrt{x^2-3}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2\sqrt{x^2-3}-x}{\sqrt{x^2-3}}$.

4. $y=x+\sqrt{2x^2+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

5. $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\sqrt{12-3x^2}+3x}{2\sqrt{12-3x^2}}$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\left(3x^2-x\right)\sqrt{2x+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{15x^2+3x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

2. $y=(1-x)\sqrt{x^2-2x+5}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-2x^2+4x-6}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

3. $y=\dfrac{3}{x^2}-\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$.

4. $y=x\sqrt{16-x^2}+(x-1)\sqrt{x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $y=\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)\sqrt{x+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\sqrt{(x-2)^3}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x-2}$.

2. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{3-x}{2\sqrt{1-x}(1-x)}$.

3. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2x^4-18x^2}{(x^2-6)\sqrt{x^2-6}}$.

4. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-x+3}}{3x+2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{11x-20}{2(3x+2)^2\sqrt{2x^2-x+3}}$.

3. Lời giải

Bài 1. **1.** $y'=5x^4-12x^2+2-3.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=5x^4-12x^2+2-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

2. $y'=\dfrac{(x^2-2x-8)'}{2\sqrt{x^2-2x-8}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-8}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$.

3. $y'=\dfrac{(4x-x^2)'}{2\sqrt{4x-x^2}}=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$

Bài 2. **1.** Tập xác định: $D=[-4;4]$.

Ta có $y'=\dfrac{(x+4)'}{2\sqrt{x+4}}-\dfrac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$

2. Tập xác định: $D=R$.

Ta có $y'=1-\dfrac{2.(x^2+3x+3)'}{2\sqrt{x^2+3x+3}}=1-\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+3}}=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+3}-2x-3}{\sqrt{x^2+3x+3}}$.

3. Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Ta có $y'=2-\dfrac{(x^2-3)'}{2\sqrt{x^2-3}}=2-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{2\sqrt{x^2-3}-x}{\sqrt{x^2-3}}$.

4. Tập xác định: $D=R$.

Ta có $y'=1+\dfrac{(2x^2+1)'}{2\sqrt{2x^2+1}}=1+\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

5. Tập xác định: $D=[-2;2]$.

Ta có $y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\left(12-3x^2\right)'}{2\sqrt{12-3x^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}}\right)=\frac{\sqrt{12-3x^2}+3x}{2\sqrt{12-3x^2}}$.

Bài 3. **1.** Tập xác định: $D=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $y'=(6x-1)\sqrt{2x+1}+\left(3x^2-x\right).\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{15x^2+3x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

2. Tập xác định: $D=R$.

Ta có $y'=-\sqrt{x^2-2x+5}+(1-x).\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{-2x^2+4x-6}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

3. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=-\frac{3\left(x^2\right)'}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{6}{x^3}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$

4. Tập xác định: $D=[0;4]$.

Ta có: $y'=\sqrt{16-x^2+x.\frac{(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}}}+\sqrt{x}+(x-1).\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$=\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. Tập xác định: $D=[-1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}-\sqrt{x+1}-(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}-\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$.

Bài 4. **1.** Tập xác định: $D=[2;+\infty)$.

Ta có $y'=\frac{3(x-2)^2}{2\sqrt{(x-2)^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{x-2}$.

2. Tập xác định: $D=(-\infty;1)$.

Ta có $y'=\frac{\sqrt{1-x}-(1+x).\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}=\frac{3-x}{2\sqrt{1-x}(1-x)}$.

3. Tập xác định: $D=\left(-\infty;-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\frac{3x^2\sqrt{x^2-6}-x^3.\frac{2x}{2\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6}=\frac{2x^4-18x^2}{\left(x^2-6\right)\sqrt{x^2-6}}$.

4. Tập xác định: $D=(-1;1)$.

Ta có $y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-(x+1).\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

5. Tập xác định: $D = R\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

Ta có $y' = \dfrac{\dfrac{(4x-1)(3x+2)}{2\sqrt{2x^2-x+3}} - 3\sqrt{2x^2-x+3}}{(3x+2)^2} = \dfrac{11x-20}{2(3x+2)^2\sqrt{2x^2-x+3}}$.

☑_ DẠNG 3. BÀI TOÁN CHỨNG MINH, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP:

♦ Tính y'.

♦ Dùng các kiến thức đã học để rút gọn, biến đổi về phương trình hoặc bất phương trình đã biết cách giải như phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc ba (sử dụng máy tính cầm tay).

♦ Đối với bài toán chứng minh bất đẳng thức thì ta biến đổi vế phức tạp thành vế đơn giản hoặc biến đổi cả hai vế cùng bằng một biểu thức trung gian.

Một số bài toán tìm nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước.

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (*)$ với $a \neq 0$.

1. Nếu phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

2. Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

3. Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$.

4. Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases}$.

Một số bài toán về bất phương trình bậc hai thường gặp.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$.

1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

2. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

3. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

4. $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh rằng $2y'.\sqrt{1+x^2}-y=0$.

Lời giải

Ta có: $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\,\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Do đó: $2y'.\sqrt{1+x^2}-y=2\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}.\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}=0$.

Vậy $2y'.\sqrt{1+x^2}-y=0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=3x+\sqrt{10-x^2}$. Giải phương trình $y'=0$.

Lời giải

Điều kiện: $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$ (*). Ta có $y'=3-\dfrac{x}{\sqrt{10-x^2}}$. Khi đó,

$$y'=0\Leftrightarrow 3-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}=0\Leftrightarrow 3\sqrt{10-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 9\left(10-x^2\right)=x^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 10x^2-90=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm 3\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=3$.

! Cần nhớ: $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\ A=B^2\end{cases}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2+3mx+2019$. Tìm tham số m để phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2-2x+3m$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x+3m=0$ (*).

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\ne 0\\ 1-9m>0\\ \dfrac{2}{3}>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{9}\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{9}$$

Vậy giá trị m là $m\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x$. Tìm tham số m để phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=10$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$ và

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)=0\Leftrightarrow x^2-2mx+\left(m^2-1\right)=0$ (*).

Ta biến đổi được $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=10\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2=10$.

Khi đó, yêu cần bài toán tương đương với

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S^2-3P=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-(m^2-1)>0\\ (2m)^2-3(m^2-1)=10\end{cases}\Leftrightarrow m^2=7\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{7}.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm\sqrt{7}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$. Tìm m để phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Ta có $y'=4mx^3+2(m^2-9)x$ và $y'=0\Leftrightarrow 4mx^3+2(m^2-9)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2mx^2+m^2-9=0\ \ (*)\end{array}\right.$

Phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương là

$$\begin{cases}2m\neq 0\\ \Delta'=0-2m(m^2-9)>0\\ 2m.0^2+m^2-9\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \left[\begin{array}{l}m<-3\\ 0<m<3\end{array}\right.\\ m\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-3\\ 0<m<3\end{array}\right..$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m<-3$ hoặc $0<m<3$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+5x-2}{x-1}$. Giải bất phương trình $y'<0$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Điều kiện $x\neq 1\ (*)$. Khi đó $y'<0\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$.

Đối chiếu với điều kiện (*), bất phương trình $y'<0$ có tập nghiệm là $S=(-1;3)\setminus\{1\}$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}(m^2-m-6)x^3-(m+2)x^2-4x+m$. Tìm tham số m sao cho $f'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(m^2-m-6)x^2-2(m+2)x-4$.

- TH1: $m^2-m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=3\end{array}\right.$.

Nếu $m=-2$ thì $f'(x)=-4<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó, $m=-2$ thỏa mãn bài toán.

Nếu $m=3$ thì $f'(x)=-10x-4<0$ là nhị thức bậc nhất nên $f'(x)$ không lớn hơn 0 với mọi $x\in\mathbb{R}$. Do đó, $m=3$ không thỏa mãn bài toán.

- TH2: $m^2-m-6\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m\neq 3\end{cases}$. Khi đó,

$$f'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(m^2-m-6)x^2-2(m+2)x-4<0,\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6<0\\ (m+2)^2+4(m^2-m-6)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-6<0\\ 5m^2-20<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<3\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2.$$

Vậy, giá trị m cần tìm là $-2\leq m\leq 2$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. 1. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$. Giải phương trình $f'(x)=0$. **ĐS:** $x=2,x=0$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$. Giải phương trình $y'=0$. **ĐS:** $x=-2,x=0$.

3. Cho hàm số $f(x)=(x-1)\sqrt{2x+1}$. Giải phương trình $y'=0$. **ĐS:** $x=0$.

Bài 2. 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2-6x-8$. Giải bất phương trình $y'\le 0$. **ĐS:** $S=\left[2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}\right]$

2. Cho hàm số $f(x)=-x^4+8x^2+1$. Giải bất phương trình $f'(x)\le 0$. **ĐS:** $S=(-2;0)\cup(2;+\infty)$

Bài 3. Cho hàm số $y=3mx^3-2x^2+(3-m)x$. Tìm tham số m để phương trình $y'\le 0$ có hai nghiệm trái dấu. **ĐS:** $m<0$ hoặc $m>3$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x+1$. Tìm tham số m sao cho $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

ĐS: $-2<m<3$.

Bài 5. Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+mx+3$. Tìm tham số m để phương trình $y'=0$ có

1. hai nghiệm phân biệt cùng âm, **ĐS:** không có giá trị m.

2. hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$. **ĐS:** $m=2,m=\frac{2}{3}$.

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. **1.** Ta có: $f'(x)=3x^2-6x$. Khi đó, $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x=2,x=0$.

2. Ta có $y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. Điều kiện $x\ne -1\ (*)$. Khi đó, $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x=-2,x=0$.

3. Ta có $y'=1.\sqrt{2x+1}+(x-1).\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}+\frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{2x+1}}$.

Điều kiện $x>-\frac{1}{2}\ (*)$. Khi đó, $y'=0\Leftrightarrow x=0$. Đối chiếu với điều kiện (*), phương trình $y'=0$ có nghiệm $x=0$.

Bài 2. **1.** Ta có $y'=x^2-4x^2-6$. Khi đó, $y'\le 0\Leftrightarrow x^2-4x^2-6\le 0\Leftrightarrow 2-\sqrt{10}\le x\le 2+\sqrt{10}$.

Vậy bất phương trình $y'\le 0$ có tập nghiệm là $S=\left[2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}\right]$.

2. Ta có $f'(x)=-4x^3+16x$. Khi đó $f'(x)<0\Leftrightarrow -4x^3+16x<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\x>2\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình $f'(x)\le 0$ có tập nghiệm là $S=(-2;0)\cup(2;+\infty)$.

Bài 3. Ta có $y'=9mx^2-4x+(3-m)$ và $y'=0\Leftrightarrow 9mx^2-4x+(3-m)=0\ (*)$.

Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\begin{cases}a\ne 0\\ac<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9m\ne 0\\9m(3-m)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<0\\m>3\end{array}\right.$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m<0$ hoặc $m>3$.

Bài 4. Ta có $f'(x)=x^2+2mx+(m+6)$. Khi đó $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+2mx+(m+6)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\m^2-n-6<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<3$.

Vậy giá trị m cần tìm là $-2<m<3$.

Bài 5. Ta có $y'=-mx^2+2(m-1)x+mx+3$ và $y'=0\Leftrightarrow -mx^2+2(m-1)x+mx+3=0\ (*)$.

1. Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt cùng âm khi và chỉ khi

$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \neq 0 \\ (m-1)^2 + m^2 > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} < 0 \\ -1 > 0 \end{cases}$ (vô lý). Vậy không có giá trị m thỏa mãn.

2. Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S^2 - 2P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 + m^2 \geq 0 \\ \left[\dfrac{2(m-1)}{m}\right]^2 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3m^2 - 8m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = 2, m = \dfrac{2}{3}$.

☑_ DẠNG 4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG PHÁP:

♦ Bảng công thức đạo hàm

Hàm sơ cấp	*Hàm hợp*
$\circ\ (\sin x)' = \cos x$	$\circ\ (\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$\circ\ (\cos x)' = -\sin x$	$\circ\ (\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$\circ\ (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\circ\ (\tan u)' = (1 + \tan^2 u) \cdot u' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\circ\ (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\circ\ (\cot u)' = -(1 + \cot^2 u) \cdot u' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y = 5\sin x - 3\cos x$. **ĐS:** $y' = 5\cos x + 3\sin x$.

2. $y = x - \dfrac{9}{x} + \dfrac{2}{x^4 + 6x^3 - 1}$. **ĐS:** $y = 1 + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{2(4x^3 + 18x^2)}{(x^4 + 6x^3 - 1)^2}$.

3. $y = \cos^2 5x$. **ĐS:** $y' = -5\sin 10x$.

4. $y = \tan^3\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $y = 15.\tan^2\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right).\dfrac{1}{\cos^2\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Lời giải

1. $y' = 5\cos x + 3\sin x$.

2. $y = 1 + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{2(4x^3 + 18x^2)}{(x^4 + 6x^3 - 1)^2}$.

3. $y' = -5\sin 10x$.

4. $y=15.\tan^2\left(5x+\frac{\pi}{3}\right).\frac{1}{\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **ĐS:** $y'=-\sin 4x$.

2. $y=\sqrt{1+\sin 2x}$. **ĐS:** $y'=\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$.

Lời giải

1. Ta có $y=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

Suy ra $y'=-\sin 4x$

2. $y'=\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\frac{2\sin x-3\cos x}{\sin x+\cos x}$. **ĐS:** $y'=\frac{5}{\sin 2x+1}$.

2. $y=\left(\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right)^2$. **ĐS:** $y'=-\frac{8\sin 2x(1+\cos 2x)}{(1-\cos 2x)^3}$.

Lời giải

1. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ta có

$$y'=\frac{(2\sin x-3\cos x)'(\sin x+\cos x)-(2\sin x-3\cos x)(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{5}{\sin 2x+1}.$$

2. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Ta có

$$y'=2\left(\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}\right).\frac{-2\sin 2x(1-\cos 2x)-(1+\cos 2x).2\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}=-\frac{8\sin 2x(1+\cos 2x)}{(1-\cos 2x)^3}.$$

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=2\sin x+\cos 2x$. **ĐS:** $y'=2\cos x-2\sin 2x$.

2. $y=\cos 3x+\tan\left(x^2+2x\right)$. **ĐS:** $y'=-3\sin 3x+\frac{2x+2}{\cos^2\left(x^2+2x\right)}$.

3. $y=(2\cos x+1)(3\sin x+1)$. **ĐS:** $y'=6\cos 2x-2\sin x+3\cos x$.

4. $y=\sin x-\frac{1}{3}\cos 3x+2\tan x+\pi$. **ĐS:** $y'=\cos x+\sin 3x+\frac{2}{\cos^2 x}$.

5. $y=\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2x^2+x}$. **ĐS:** $y'=3x^3+\cos 2x+\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x}}$.

6. $y=7\sin 4x-2\cos 5x$. **ĐS:** $y'=28\cos 4x+10\sin 5x$.

7. $y=\cos\left(3x^7+2\right)+\cot 2x$. **ĐS:** $y'=-21x^6.\sin\left(3x^7+2\right)-\frac{2}{\sin^2 2x}$.

9. $y=\sin 2x-\cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $y'=2\cos 2x+\frac{1}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

10. $y=\cos\left(2x^2-5x+14\right)$. **ĐS:** $y'=\left(5-4x\right).\sin\left(2x^2-5x+14\right)$.

11. $y=\cos^2 2x-\sin 2x$. **ĐS:** $y'=-2\sin 4x-2\cos 2x$.

12. $y=\sin^2 3x+\cos x$. **ĐS:** $y'=3\sin 6x-\sin x$.

13. $y=\cos^3 2x-\tan x$. **ĐS:** $y'=-6\cos^2 2x.\sin 2x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

14. $y=\sin^3(2x+1)$. **ĐS:** $y'=6\sin^2(2x+1).\cos(2x+1)$.

15. $y=\cos^4(3x-1)$. **ĐS:** $y'=-12\cos^3(3x-1).\sin(3x-1)$.

16. $y=\cos^2(\sin 2x)$. **ĐS:** $y'=-\sin(2\sin 2x).\cos 2x$.

17. $y=\sin(\cos^2 x.\tan^2 x)$. **ĐS:** $y'=-\sin 2x.\cos(\sin^2 x)$.

18. $y=2\sin^2 4x-3\cos^3 5x$. **ĐS:** $y'=8\sin 8x+45\cos^2 5x.\sin 5x$.

19. $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$.

20. $y=\cos^{2017}\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right)$. **ĐS:** $y=-6015x^2.\cos^{2016}\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right).\sin\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right)$.

21. $y=\tan^3\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2$. **ĐS:** $y'=12\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right).\dfrac{\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2}$.

22. $y=\left(3-\sin x\right)^3$. **ĐS:** $y'=-3\cos x.\left(3-\sin x\right)^2$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\left(\sin x+\cos x\right)^8$. **ĐS:** $y'=128\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\sin^7\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. $y=(2\sin x-\cos x)^4$. **ĐS:** $y'=4(2\cos x+\sin x)(2\sin x-\cos x)^3$.

3. $y=(2+\sin^2 2x)^8$. **ĐS:** $y'=16\sin 4x(2+\sin^2 2x)^7$.

4. $y=(\cos^4 x-\sin^4 x)^5$. **ĐS:** $y=-5\sin 4x$.

5. $y=\sin\sqrt{x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

6. $y=\sqrt{\cos 2x}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

7. $y=\sqrt{\sin x+2x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.

8. $y=\cos\sqrt{2+x^2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{x\sin\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$.

9. $y=\sin\sqrt{x^2+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

10. $y=\sqrt{2x^3+\sin 5x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{6x^2+5\cos 5x}{2\sqrt{2x^3+\sin 5x}}$.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\dfrac{x}{\cos x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$.

2. $y=\dfrac{2x+\sin 2x}{1-\cos 2x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{4x\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}$.

3. $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{1-x\cot x}{\sin x}$.

4. $y=\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin x+\cos x}$. **ĐS:** $y'=-\cos 2x$.

5. $y=\dfrac{5x^2+1}{4+3\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{10x(4+3\sin x)-3\cos x(5x^2+1)}{(4+3\sin x)^2}$.

6. $y=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{4}{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$.

7. $y=\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2(x\cos x-\sin x)}{(x-\sin x)^2}$.

8. $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$. **ĐS:** $y'=\dfrac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. Tính $f'(0), f'(\pi), f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ĐS : $f'(0)=-1, f'(\pi)=-1, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}, f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-2$

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. **1.** $y'=2(\sin x)'-(2x)'.\sin 2x=2\cos x-2\sin 2x$.

2. $y'=-3\sin 3x+\dfrac{\left(x^2+2x\right)'}{\cos^2\left(x^2+2x\right)}=-3\sin 3x+\dfrac{2x+2}{\cos^2\left(x^2+2x\right)}$.

3. $y'=-2\sin x(3\sin x+1)+(2\cos x+1).3\cos x=6\cos 2x-2\sin x+3\cos x$.

4. $y'=\cos x+\sin 3x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

5. $y'=3x^3+\cos 2x+\dfrac{\left(2x^2+x\right)'}{2\sqrt{2x^2+x}}=3x^3+\cos 2x+\dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x}}$.

6. $y'=28\cos 4x+10\sin 5x$.

7. $y'=-\left(3x^7+2\right).\sin\left(3x^7+2\right)-\dfrac{2}{\sin^2 2x}=-21x^6.\sin\left(3x^7+2\right)-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$.

8. $y'=2\cos 2x+\dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)'}{\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=2\cos 2x+\dfrac{1}{\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

9. $y'=\cos x-3\sin x-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

10. $y'=-\left(2x^2-5x+14\right)'.\sin\left(2x^2-5x+14\right)=(5-4x).\sin\left(2x^2-5x+14\right)$.

11. $y' = 2\cos 2x.\left(\cos 2x\right)' - 2\cos 2x = -4\sin 2x\cos 2x - 2\cos 2x = -2\sin 4x - 2\cos 2x$.

12. $y' = 2\sin 3x.\left(\sin 3x\right)' - \sin x = 6\sin 3x\cos 3x - \sin x = 3\sin 6x - \sin x$.

13. $y' = 3\cos^2 2x.(\cos 2x)' - \dfrac{1}{\cos^2 x} = -6\cos^2 2x.\sin 2x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

14. $y' = 3\sin^2(2x+1).(\sin(2x+1))' = 6\sin^2(2x+1).\cos(2x+1)$.

15. $y' = 4\cos^3(3x-1).(\cos(3x-1))' = -12\cos^3(3x-1).\sin(3x-1)$.

16. $y' = 2\cos(\sin 2x).(\cos(\sin 2x))' = -2\cos(\sin 2x).\sin(2\sin 2x).\cos 2x = -\sin(2\sin 2x).\cos 2x$.

17. Ta có: $y = \sin(\sin^2 x)$. Suy ra

$y' = (\sin^2 x)'.\cos(\sin^2 x) = 2\sin x.\cos x.\cos(\sin^2 x) = \sin 2x.\cos(\sin^2 x)$.

18. $y' = 4\sin 4x.(\sin 4x)' - 9\cos^2 5x.(\cos 5x)'$

$= 16\sin 4x\cos 4x + 45\cos^2 5x\sin 5x = 8\sin 8x + 45\cos^2 5x\sin 5x$.

19. $y' = 2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right)' = -2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$

$$= -\sin\left(2.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\sin\left(2.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).$$

20. $y' = 2017.\cos^{2016}\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right).\left(\cos\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right)\right)' = -6015x^2.\cos^{2016}\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right).\sin\left(x^3+\dfrac{\pi}{7}\right)$.

21. $y' = 3\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2.\left(\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)^2\right)'$.

$$= 3\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2.\frac{\left(\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2\right)'}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2} = 12\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).\frac{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2}.$$

22. $y' = 3.\left(3-\sin x\right)^2.\left(3-\sin x\right)' = -3\cos x.\left(3-\sin x\right)^2$.

Bài 2. **1.** Ta có: $y = \left(\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^8 = 16.\sin^8\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Suy ra: $y' = 16.8.\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin^7\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 128\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\sin^7\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. $y' = 4(2\sin x - \cos x)'.(2\sin x - \cos x)^3 = 4(2\cos x + \sin x)(2\sin x - \cos x)^3$.

3. $y' = 8(2+\sin^2 2x)'.(2+\sin^2 2x)^7 = 16(\sin 2x)'.\sin 2x.(2+\sin^2 2x)^7 = 16\sin 4x.(2+\sin^2 2x)^7$.

4. Ta có: $y = ((\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x))^5 = \cos^5 2x$. Suy ra:

$y' = 5(\cos 2x)'.\cos^4 2x = -5\sin 4x$.

5. $y' = \sqrt{x}'\cos\sqrt{x} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

6. $y'=\dfrac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}}=-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

7. $y'=\dfrac{(\sin x+2x)'}{2\sqrt{\sin x+2x}}=\dfrac{\cos x+2}{2\sqrt{\sin x+2x}}$.

8. $y'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'.\sin\sqrt{2+x^2}=\dfrac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}}\sin\sqrt{2+x^2}=\dfrac{x\sin\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$.

9. $y'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'.\cos\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

10. $y'=\dfrac{(2x^3+\sin 5x)'}{2\sqrt{2x^3+\sin 5x}}=\dfrac{6x^2+5\cos 5x}{2\sqrt{2x^3+\sin 5x}}$.

Bài 3. **1.** Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y'=\dfrac{x'.\cos x-x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$.

2. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y'=\dfrac{(2+2\cos 2x)(1-\cos 2x)-(2x+\sin 2x).2\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}$

$=\dfrac{2-2\cos 2x+2\cos 2x-2\cos^2 2x-4x\sin 2x-2\sin^2 2x}{(1-\cos 2x)^2}=\dfrac{4x\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}$.

3. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}+\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{1-x\cot x}{\sin x}$.

4. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y=\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{\sin x+\cos x}=1-\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Khi đó: $y'=\left(1-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=-\cos 2x$.

5. Ta có $y'=\dfrac{(5x^2+1)'.(4+3\sin x)-(5x^2+1)(4+3\sin x)'}{(4+3\sin x)^2}=\dfrac{10x(4+3\sin x)-3\cos x(5x^2+1)}{(4+3\sin x)^2}$.

6. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y'=\dfrac{(2\cos 2x-2\sin 2x)(\sin 2x-\cos 2x)-(\sin 2x+\cos 2x)(2\cos 2x+2\sin 2x)}{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$

$=\dfrac{-2\left[(\sin 2x-\cos 2x)^2+(\sin 2x+\cos 2x)^2\right]}{(\sin 2x-\cos 2x)^2}=\dfrac{-2\left[1-2\sin 2x\cos 2x+1+2\sin 2x\cos 2x\right]}{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$

$=-\dfrac{4}{(\sin 2x-\cos 2x)^2}$.

7. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq 0$.

Ta có $y'=\dfrac{(1+\cos x)(x-\sin x)-(x+\sin x)(1-\cos x)}{(x-\sin x)^2}$

$$=\frac{x-\sin x+x\cos x-\sin x\cos x-x+x\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{(x-\sin x)^2}=\frac{2(x\cos x-\sin x)}{(x-\sin x)^2}.$$

8. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $y'=\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}.\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{3\sin^2 x(1+\cos x)}{(1+\cos x)^4}=\frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$.

Bài 4. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $f'(x)=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{\sin x+1}$

Vậy : $f'(0)=-1,\ f'(\pi)=-1,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-2$.

☑_ DẠNG 5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ĐẠO HÀM

PHƯƠNG PHÁP:

- Tính đạo hàm của hàm số đã cho
- Thay y,y' vào biểu thức để biến đổi chứng minh hoặc giải phương trình liên quan.

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\tan x$. Chứng minh $y'-y^2-1=0$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$

Ta có $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Khi đó $y'-y^2-1=1+\tan^2 x-\tan^2 x-1=0$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=\sin 2x-2\cos x$. Giải phương trình $f'(x)=0$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=2\cos 2x+2\sin x$.

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\cos 2x+2\sin x=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in Z\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in Z\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in Z\end{array}\right..$$

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có các nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ với $k\in Z$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho hàm số $y=x.\sin x$. Chứng minh

1. $xy+x(2\cos x-y)=2(y'-\sin x)$

2. $y'-x.\cos x=\cos x.\tan x$ với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}.f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3.f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$

Bài 3. Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Giải phương trình $y'=0$

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in Z$

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. Ta có $y'=\sin x+x.\cos x$

1. $xy+x(2\cos x-y)=2(y'-\sin x)\Leftrightarrow xy+2x.\cos x-xy=2(\sin x+x.\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow 2x.\cos x=2x.\cos x$ (luôn đúng)

2. Với mọi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$, ta có

$y'-x.\cos x=\sin x+x.\cos x-x.\cos x=\sin x=\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}=\cos x.\tan x$

Bài 2. Ta có $f'(x)=\dfrac{-2\cos x.\sin x\left(1+\sin^2 x\right)-\cos^2 x.2\sin x.\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$

$=\dfrac{-2\sin x.\cos x\left(1+\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$

$=-\dfrac{2\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$

Lại có $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3};f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{8}{9}$

Do đó, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3.f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}-3.\left(-\dfrac{8}{9}\right)=3$.

Bài 3. Ta có $y'=-2\cos x.\sin x+\cos x=-\cos x(2\sin x-1)$

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow -\cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;k\in Z\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in Z\end{array}\right.$

Vậy phương trình $y'=0$ có các nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;k\in Z$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. **1.** Cho $y=2x^2-x+2$. Tính $y'(1)$? **ĐS:** $y'(1)=3$.

2. Cho $f(x)=\sqrt{2x+7}$. Tính $f'(1)$? **ĐS:** $f'(1)=\dfrac{1}{3}$.

3. Cho $y=\sqrt{x^2+5}$. Tính $y'(2)$? **ĐS:** $y'(2)=\dfrac{2}{3}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=x^6-2x^3-5x^2+3$ **ĐS:** $6x^5-6x^2-10x$.

2. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{x^2}{2}-2$ **ĐS:** x^3-x.

3. $y=-\frac{1}{4}x^4-2x^2-5$ **ĐS:** $-x^3-4x$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=m^2x^4-(m-1)x^2+m^2-5m+4$ **ĐS:** $4m^2x^3-2(m-1)x$.

2. $y=3x^5-6mx^4-2mx+m^2-1$ **ĐS:** $15x^4-24mx^3-2m$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=(2x-3)(x^5-2x)$ **ĐS:** $12x^5-15x^4-8x+6$.

2. $y=(x^2-2x+3)(2x^2+3)$ **ĐS:** $8x^3-12x^2+18x-6$.

3. $y=(x^2+1)(5-3x^2)$ **ĐS:** $-12x^3+4x$.

Bài 5. Tìm đạo hàm của hàm số sau

1. $y=(1-2x^2)^3$. **ĐS:** $-48x^5+48x^3-12x$.

2. $y=(x^2+x+1)^4$. **ĐS:** $4(2x+1)(x^2+x+1)^3$.

3. $y=(x-x^2)^{32}$. **ĐS:** $32(1-2x)(x-x^2)^{31}$.

4. $y=(x^2-x+1)^3$ **ĐS:** $3(2x-1)(x^2-x+1)^2$.

Bài 6. Tính đạo hàm của hàm số sau

1. $y=\frac{5x}{1-4x}$. **ĐS:** $y'=\frac{5}{(1-4x)^2}$.

2. $y=\frac{x-1}{x+2}$. **ĐS:** $\frac{3}{(x+2)^2}$.

3. $y=\frac{6x-1}{x+2}$. **ĐS:** $\frac{13}{(x+2)^2}$.

4. $y=\frac{mx-2}{x-m+1}$. **ĐS:** $\frac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}$.

5. $y=\frac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$. **ĐS:** $\frac{4m^2}{(x+m)^2}$.

Bài 7. Tính đạo hàm của hàm số sau

1. $y=\frac{x^2+5x-2}{x-1}$. **ĐS:** $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

2. $y=\frac{2x^2+4x+1}{x-3}$. **ĐS:** $\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}$.

3. $y=\frac{x-1}{x^2-3x+3}$. **ĐS:** $\frac{-x^2+2x}{(x^2-3x+3)^2}$.

4. $y=\frac{2x^2+mx-3m+1}{mx-1}$. **ĐS:** $\frac{2mx^2-4x+3m^2-2m}{(mx-1)^2}$.

Bài 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=-x+1-\dfrac{1}{x+2}$. **ĐS:** $-1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

2. $y=\dfrac{3}{(3x+5)^2}$. **ĐS:** $-\dfrac{18}{(3x+5)^3}$.

3. $y=\dfrac{2}{x^3-3x^2+1}$ ĐS: $\dfrac{6x(2-x)}{\left(x^3-3x^2+1\right)^2}$

4. $y=\dfrac{1}{\left(x^3-3x\right)^{11}}-\dfrac{1}{x}$.ĐS: $\dfrac{33\left(1-x^2\right)}{\left(x^3-3x\right)^{12}}+\dfrac{1}{x^2}$

Bài 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{2}{x}+4\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x^4+1$. **ĐS:** $-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-2x^3$.

2. $y=\sqrt{1+2x-x^2}$. **ĐS:** $\dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

3. $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$. **ĐS:** $\dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+2}}$.

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{1}{4}x^2-x-\sqrt{4x-x^2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{(x-2)\sqrt{4x-x^2}+2x-4}{2\sqrt{4x-x^2}}$.

2. $y=x^2\sqrt{x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$.

3. $y=x^2+x\sqrt{x}+1$. **ĐS:** $y'=2x+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

4. $y=(x-1)\sqrt{3x+2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{9x+1}{2\sqrt{3x+2}}$.

5. $y=x\sqrt{1-x^2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{100-x}{2(x+100)^2\sqrt{x}}$.

2. $y=\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{16}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

3. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-5x+8}{2\left(x^2-x+3\right)\sqrt{x^2-x+3}}$

4. $\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-4}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

5. $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2x^3-2x^2-1}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)^2}$.

2. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{x^2-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}$.

3. $y=\left(1-\sqrt{1-2x}\right)^3$. **ĐS:** $y'=3\left(1-\sqrt{1-2x}\right)^2.\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

4. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

5. $y=\dfrac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-x-7-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}\left(x-1\right)^2}$.

Bài 13. **1.** Cho hàm số $f(x)=-2x^4-x^2+4$. Giải phương trình $f'(x)=0$. **ĐS:** $x=0$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+2}{1-x}$. Giải phương trình $y'=0$. **ĐS:** $x=1\pm\sqrt{2}$.

3. Cho hàm số $y=x-2+\dfrac{4}{x^2}$. Giải phương trình $y'=0$. **ĐS:** $x=2$.

Bài 14. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m^2$. Tìm m để phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt. **ĐS:** $m>0$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$. Giải bất phương trình $f'(x)>0$.

Bài 16. Cho hàm số $f(x)=x^3+mx^2+(4m-9)x$. Tìm tham số m sao cho $f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **ĐS:** $3\le m\le 9$.

Bài 17. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$. Tìm tham số m để phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+4x_1x_2=2$. **ĐS:** $m=\pm1$.

Bài 18. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\sqrt{\tan 4x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2(1+\tan^2 4x)}{\sqrt{\tan 4x}}$.

2. $y=\sqrt{1+2\tan x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$.

3. $y=\cot^3\sqrt{x^2-x+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{3(2x-1)\cot^2\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}.\sin^2\sqrt{x^2-x+1}}$.

4. $y=\cos^4\sqrt{2x+1}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{4\sin\sqrt{2x+1})\cos^3\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$.

5. $y=\sqrt{1-\cot^2 x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\cot x\left(1+\cot^2 x\right)}{\sqrt{1-\cot^2 x}}$.

6. $y=\sqrt{2\sin^2 x-3\cos 2x+5}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{4\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x-3\cos 2x+5}}$.

7. $y=\sqrt{\cot^2\left(x^2+1\right)}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2x\cot\left(x^2+1\right)}{-\sin^2\left(x^2+1\right)\sqrt{\cot^2\left(x^2+1\right)}}$.

8. $y=\sqrt{\cot^3 2x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{-3\left(1+\cot^2 2x\right)}{\sqrt{\cot^3 2x}}$.

Bài 19. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=x.\cos x$. **ĐS:** $y'=\cos x-x.\sin x$.

2. $y=x.\sin x$. **ĐS:** $y'=\sin x-x.\cos x$.

3. $y=(2x+1).\sin x$. **ĐS:** $y'=2\sin x+(2x+1).\cos x$.

4. $y=(5-x).\cos 5x$. **ĐS:** $y'=-5(5-x)\sin 5x$ $y'=2\sin x+(2x+1).\cos x$.

5. $y=\left(4-x^2\right).\cos 2x$. **ĐS:** $y'=-2x\cos 2x-2\left(4-x^2\right)\sin 2x$.

6. $y=\left(2-x^2\right).\sin 3x$. **ĐS:** $y'=-2x\sin 3x+3\left(2-x^2\right)\cos 3x$.

7. $y=(x-\sin x).(\pi-x-\sin x)$. **ĐS:** $y'=\pi(1-\cos x)-2x+\sin 2x$.

8. $y=x\cot 2x$. **ĐS:** $y'=\cot 2x-2x\left(1+\cot^2 2x\right)$.

9. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. **ĐS:** $y'=1+\tan^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$. **ĐS:** $y'=-1-\cot^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài 20. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{2\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x}}$

2. $y=\dfrac{\cos^4 3x-1}{\sqrt{\cos 2x}-2}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{\left(\cos^4 3x-1\right)\sin 2x}{\left(\sqrt{\cos 2x}-2\right)^2\sqrt{\cos 2x}}-\dfrac{12\sin 3x.\cos^3 3x}{\sqrt{\cos 2x}-2}$

3. $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{2\sin 2x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$

4. $y=\dfrac{1+\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{6\sin 6x}{\cos^2 6x}$

5. $y=\dfrac{\sin x-x.\cos x}{\cos x+x.\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{x^2}{\left(\cos^2 x+x\sin x\right)^2}$

6. $y=\dfrac{4x-2}{\sqrt{4\cot x-\sin x+\sqrt{x}}}$. **ĐS:**

$$y'=\frac{4\left(\sqrt{4\cot x-\sin x}+\sqrt{x}\right)-(4x-2)\left[\dfrac{-4\left(1+\cot^2 x\right)-\cos x}{2\sqrt{4\cot x-\sin x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{\left(\sqrt{4\cot x-\sin x}+\sqrt{x}\right)^2}.$$

7. $y=\dfrac{\cos x}{\cos x-\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{1-\sin 2x}$.

8. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$. **ĐS:** $y'=\dfrac{1}{\sin 2x+1}$.

9. $y=\dfrac{2-\sin 2x}{\cos^3 x+\sin^3 x}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{2(\cos x-\sin x)}{\sin 2x+1}$.

10. $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. **ĐS:** $y'=-\dfrac{2\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$.

Bài 21. Cho hàm số $y=\cot 2x$. Chứng minh $y'+2y^2+2=0$.

Bài 22. Cho các hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ và $g(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$.

Chứng minh $3f'(x)-2g'(x)=0$.

Bài 23. Cho hàm số $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$. Giải phương trình $y'=0$.

ĐS: $x=\arctan 2+k\pi; k\in Z$.

D. LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 2. **1.** $y'=6.x^5-2.3x^2-5.2x=6x^5-6x^2-10x.$

2. $y'=\left(\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{x^2}{2}-2\right)'=\dfrac{1}{4}.4x^3-\dfrac{1}{2}.2x=x^3-x.$

3. $y'=\left(-\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-5\right)'=-\dfrac{1}{4}.4x^3-2.2x=-x^3-4x.$

Bài 3. **1.** $y'=4.m^2x^3-2.(m-1)x=4m^2x^3-2(m-1)x.$

2. $y'=3.5x^4-6.4mx^3-2m=15x^4-24mx^3-2m.$

Bài 4. **1.** $y'=\left[(2x-3)(x^5-2x)\right]'=(2x-3)'.(x^5-2x)+(2x-3).(x^5-2x)'$

$=2.(x^5-2x)+(2x-3).(5x^4-2)=2x^5-4x+10x^5-15x^4-4x+6=12x^5-15x^4-8x+6.$

2. $y'=\left[(x^2-2x+3)(2x^2+3)\right]'=(x^2-2x+3)'.(2x^2+3)+(x^2-2x+3).(2x^2+3)'$

$=(2x-2).(2x^2+3)+(x^2-2x+3).(4x)=4x^3-4x^2+6x-6+4x^3-8x^2+12x$

$=8x^3-12x^2+18x-6$

3. $y'=\left[(x^2+1)(5-3x^2)\right]'=(x^2+1)'.(5-3x^2)+(x^2+1).(5-3x^2)'$

$=(2x).(5-3x^2)+(x^2+1).(-6x)=10x-6x^3-6x^3-6x=-12x^3+4x.$

Bài 5. **1.** $y'=3(1-2x^2)^2.(-4x)=-12x(4x^4-4x^2+1)=-48x^5+48x^3-12x.$

2. $y'=4(x^2+x+1)^3.(2x+1)=4(2x+1)(x^2+x+1)^3.$

3. $y'=32.(x-x^2)^{31}.(1-2x)=32(1-2x)(x-x^2)^{31}.$

4. $y'=3(x^2-x+1)^2.(2x-1)=3(2x-1)(x^2-x+1)^2.$

Bài 6. **1.** - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được:

$$y'=\frac{(5x)'(1-4x)-5x(1-4x)'}{(1-4x)^2}=\frac{5(1-4x)+4.5x}{(1-4x)^2}=\frac{5}{(1-4x)^2}$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{5.1+4.0}{(1-4x)^2} = \frac{5}{(1-4x)^2}$$

2. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(x-1)'(x+2)-(x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1.(x+2)-(x-1).1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{1.2+1.1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

3. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(6x-1)'(x+2)-(6x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{6.(x+2)-(6x-1).1}{(x+2)^2} = \frac{13}{(x+2)^2}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{6.2+1.1}{(x+2)^2} = \frac{13}{(x+2)^2}.$$

4. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y' = \frac{(mx-2)'(x-m+1)-(mx-2)(x-m+1)'}{(x-m+1)^2} = \frac{m(x-m+1)-(mx-2).1}{(x-m+1)^2} = \frac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \frac{m(-m+1)+2.1}{(x-m+1)^2} = \frac{-m^2+m+2}{(x-m+1)^2}.$$

5. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{\left((3m+1)x-m^2+m\right)'(x+m)-\left((3m+1)x-m^2+m\right)(x+m)'}{(x+m)^2}$$
$$=\frac{(3m+1).(x+m)-\left((3m+1)x-m^2+m\right).1}{(x+m)^2}=\frac{4m^2}{(x+m)^2}.$$

- Cách 2: Sử dụng công thức nhanh: $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\frac{(3m+1).m-1.(-m^2+m)}{(x+m)^2}=\frac{4m^2}{(x+m)^2}.$$

Bài 7. **1.** - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(x^2+5x-2)'(x-1)-(x-1)'(x^2+5x-2)}{(x-1)^2}=\frac{(2x+5)(x-1)-(x^2+5x-2)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm):

$$y'=\begin{pmatrix}1 & 5 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

2. - Cách 1: Sử dụng công thức: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ta được

$$y'=\frac{(2x^2-4x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x^2-4x+1)}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{(4x-4)(x-3)-(2x^2-4x+1)}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}.$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (Rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm):

$$y'=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}.$$

3. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ ta được:

$$y'=\frac{(x-1)'(x^2-3x+3)-(x^2-3x+3)'(x-1)}{(x^2-3x+3)^2}=\frac{1.(x^2-3x+3)-(2x-3)(x-1)}{(x^2-3x+3)^2}=\frac{-x^2+2x}{(x^2-3x+3)^2}$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhan (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y'=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}=\frac{-x^2+2x}{(x^2-3x+3)^2}$$

4. - Cách 1. Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ta được:

$$y' = \frac{\left(2x^2 + mx - 3m + 1\right)'(mx-1) - (mx-1)'\left(2x^2 + mx - 3m + 1\right)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(4x+m)(x-1) - m\left(2x^2 - 3m + 1\right)}{(mx-1)^2}$$

$$= \frac{2mx^2 - 4x + 3m^2 - 2m}{(mx-1)^2}$$

- Cách 2. Sử dụng công thức nhanh (rèn luyện cho lớp 12 trong trắc nghiệm)

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & m & -3m+1 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} = \frac{2mx^2 - 4x + 3m^2 - 2m}{(mx-1)^2}$$

Bài 8. **1.** $y' = -1 + 0 + \frac{(x+2)'}{(x+2)^2} = -1 + \frac{1}{(x+2)^2}$

2. $y' = -3.\frac{\left[(3x+5)^2\right]'}{(3x+4)^4} = -3.\frac{2(3x+5).(3x+5)'}{(3x+5)^4} = -\frac{18}{(3x+5)^3}$.

3. $y' = -2.\frac{\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)'}{\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)^2} = -2.\frac{3x^2 - 6x}{\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)^2} = \frac{6x(2-x)}{\left(x^3 - 3x^2 + 1\right)^2}$

4. $y' = -\frac{\left[\left(x^3 - 3x\right)^{11}\right]'}{\left(x^3 - 3x\right)^{22}} + \frac{1}{x^2} = -\frac{11\left(x^3 - 3x\right)^{10}.\left(x^3 - 3x\right)'}{\left(x^3 - 3x\right)^{22}} + \frac{1}{x^2} = \frac{33\left(1 - x^2\right)}{\left(x^3 - 3x\right)^{12}} + \frac{1}{x^2}$

Bài 9. **1.** $y' = -2.\frac{1}{x^2} + 4.\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.4x^3 = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x^3$.

2. $y' = \frac{\left(1 + 2x - x^2\right)'}{2\sqrt{1 + 2x - x^2}} = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{1 + 2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$.

3. $y' = \frac{\left(2x^2 - 5x + 2\right)'}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}} = \frac{4x - 5}{2\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}$.

Bài 10. **1.** Tập xác định: $D = [0;4]$.

Ta có $y' = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{\left(4x - x^2\right)'}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{(x-2)\sqrt{4x - x^2} + 2x - 4}{2\sqrt{4x - x^2}}$.

2. Tập xác định: $D = [0;+\infty)$.

Ta có $y' = \left(x^2\right)'.\sqrt{x} + x^2.\left(\sqrt{x}\right)' = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

3. Tập xác định: $D = [0;+\infty)$.

Ta có $y' = 2x + (x)'\sqrt{x} + x\left(\sqrt{x}\right)' = 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

4. Tập xác định: $D=\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Ta có $y'=(x-1)'\sqrt{3x+2}+(x-1)\left(\sqrt{3x+2}\right)'=\sqrt{3x+2}+(x-1).\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}=\frac{9x+1}{2\sqrt{3x+2}}$.

5. Tập xác định: $D=[-1;1]$.

Ta có $y'=\sqrt{1-x^2}+x.\frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bài 11. **1.** Tập xác định: $D=[0;+\infty)$.

Ta có $y'=\frac{2\sqrt{x}}{(x+100)^2}=\frac{100-x}{2(x+100)^2\sqrt{x}}$.

2. Tập xác định: $D=(-4;4)$.

Ta có $y'=\frac{\sqrt{16-x^2}-x.\frac{(-x)}{\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2}=\frac{16}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}$.

3. Tập xác định: $D=R$.

Ta có $y'=\frac{\sqrt{x^2-x+3}-(x+2).\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+3}}}{x^2-x+3}=\frac{-5x+8}{2\left(x^2-x+3\right)\sqrt{x^2-x+3}}$.

4. Tập xác định: $D=R\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.x-\sqrt{4+x^2}}{x^2}=\frac{-4}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

5. Tập xác định: $D=R\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có $y'=\frac{(2x-1)\left(x\sqrt{x^2+1}\right)'-2x\sqrt{x^2+1}}{(2x-1)^2}$

$=\frac{(2x-1)\sqrt{x^2+1}+(2x-1).\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-2x\sqrt{x^2+1}}{(2x-1)^2}$

$=\frac{2x^3-2x^2-1}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 12. **1.** Tập xác định: $D=[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có $y'\frac{\left(x\sqrt{x}\right)'\left(x^2-1\right)-2x^2\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\left(x^2-1\right)-2x^2\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)^2}$.

2. Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}=\dfrac{x^2-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}}$.

3. Tập xác định: $D=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có $y'=3\left(1-\sqrt{1-2x}\right)^2\left(1-\sqrt{1-2x}\right)'=3\left(1-\sqrt{1-2x}\right)^2.\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

4. Tập xác định: $D=[0;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{-2}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

5. Tập xác định: $D=[-3;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}.(x-1)-\left(1+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)-2\sqrt{x+3}-2(x+3)}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2}=\dfrac{-x-7-2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}(x-1)^2}$.

Bài 13. **1.** Ta có $f'(x)=-8x^3-2x$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow -8x^3-2x=0\Leftrightarrow -2x\left(4x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có một nghiệm $x=0$.

2. Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x+2}{(1-x)^2}$. Điều kiện $x\neq 1\ (*)$. Khi đó

$y'=0\Leftrightarrow -2x^2+4x+2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$.

Kết hợp với điều kiện (*), phương trình $y'=0$ có hai nghiệm $x=1\pm\sqrt{2}$.

3. Điều kiện $x\neq 0\ (*)$. Ta có $y'=1-\dfrac{4\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3-8}{x^3}$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x^3-8=0\Leftrightarrow x=2$.

Kết hợp với điều kiện (*), phương trình $y'=0$ có một nghiệm $x=2$.

Bài 14. Ta có $y'=4x^3-4mx$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4mx=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-m=0\ (*)\end{array}\right.$.

Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương là $\begin{cases}m>0\\0^2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>0$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m>0$.

Bài 15. Ta có $f'(x)=3x^3+6x-9$. Khi đó, $f'(x)>0\Leftrightarrow 3x^3+6x-9>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình $f'(x)>0$ có tập nghiệm là $S=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Bài 16. Ta có $f'(x)=3x^2+2mx+(4m-9)$. Khi đó

$f'(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3x^2+2mx+(4m-9)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\m^2-3(4m-9)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-12m+27\le 0\Leftrightarrow 3\le m\le 9$.

Vậy giá trị m cần tìm là $3 \le m \le 9$.

Bài 17. Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0\ (*)$.

Phương trình (*) có $ac = -1 < 0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Khi đó

$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow (2m)^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \pm 1$.

Bài 20. **1.** Ta có $y' = \dfrac{-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x} - \dfrac{2\sin x.\cos x.\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}}{1+\sin^2 x} = \dfrac{-\sin x\left(1+\sin^2 x\right) - \sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$= -\dfrac{2\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)\sqrt{1+\sin^2 x}}$

2. Điều kiện xác định $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

Ta có $y' = \dfrac{4\cos^3 3x(-3\sin 3x)\left(\sqrt{\cos 2x} - 2\right) - \left(\cos^4 3x - 1\right)\dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}}{\left(\sqrt{\cos 2x} - 2\right)^2}$

$= \dfrac{\left(\cos^4 3x - 1\right)\sin 2x}{\left(\sqrt{\cos 2x} - 2\right)^2\sqrt{\cos 2x}} - \dfrac{12\sin 3x.\cos^3 3x}{\sqrt{\cos 2x} - 2}$

3. Ta có $y' = \dfrac{2\sin x.\cos x\left(1+\cos^2 x\right) + 2\cos x.\sin x.\sin^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2} = \dfrac{2\sin x.\cos x\left(1+\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$

$= \dfrac{4\sin x.\cos x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2} = \dfrac{2\sin 2x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$

4. Điều kiện xác định của hàm số là $x \ne \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}, x \ne \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in Z$

Ta có $y = \dfrac{1+\tan^2 3x}{1-\tan^2 3x} = \dfrac{1}{\cos^2 3x\left(1-\tan^2 3x\right)} = \dfrac{1}{\cos^2 3x - \sin^2 3x} = \dfrac{1}{\cos 6x}$

Khi đó $y' = -\dfrac{(\cos 6x)'}{\cos^2 6x} = \dfrac{6\sin 6x}{\cos^2 6x}$

5. Điều kiện xác định của hàm số là $\cos x + x\sin x \ne 0$

Ta có $y' = \dfrac{\left[\cos x - (\cos x - x.\sin x)\right](\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)\left[-\sin x + (\sin x + x\cos x)\right]}{(\cos x + x\sin x)^2}$

$= \dfrac{x\sin x(\cos x + x\sin x) - x\cos x(\sin x - x\cos x)}{(\cos x + x\sin x)^2} = \dfrac{x\sin x\cos x + x^2\sin^2 x - x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x}{(\cos x + x\sin x)^2}$

$= \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$

6. Với điều kiện xác định của hàm số ta có

$$y'=\frac{4\left(\sqrt{4\cot x-\sin x}+\sqrt{x}\right)-(4x-2)\left[\frac{-4\left(1+\cot^2 x\right)-\cos x}{2\sqrt{4\cot x-\sin x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{\left(\sqrt{4\cot x-\sin x}+\sqrt{x}\right)^2}$$

7. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$

Ta có

$$y'=\frac{-\sin x(\cos x-\sin x)-\cos x(-\sin x-\cos x)}{(\cos x-\sin x)^2}=\frac{-\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}{1-\sin 2x}$$

$$=\frac{1}{1-\sin 2x}$$

8. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$

Ta có $y'=\frac{\cos x(\cos x+\sin x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{1+\sin 2x}$

$$=\frac{1}{1+\sin 2x}$$

9. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$

Ta có $y'=\frac{2-2\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{2(1-\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^{2x}\right)}=\frac{2}{\sin x+\cos x}$

Khi đó $y'=-\frac{s(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=-\frac{2(\cos x-\sin x)}{\sin 2x+1}$

10. Ta có

$$y'=\frac{-2\cos x\sin x\left(1+\sin^2 x\right)-\cos^2 x.2\cos x\sin x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}=\frac{-2\cos x\sin x\left(1+\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$$

$$=-\frac{2\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2}$$

Bài 21. Điều kiện xác định của hàm số là $x\neq k\frac{\pi}{2},k\in Z$

Ta có $y'=-2\left(1+\cot^2 2x\right)$

Khi đó $y'+2y^2+2=-2\left(1+\cot^2 2x\right)+2\cot^2 2x+2=-2-2\cot^2 2x+2\cot^2 2x+2=0$

Ta có điều phải chứng minh

Bài 22. Ta có

$$f(x)=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$g(x)=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x.\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Khi đó

$f'(x)=-\frac{1}{2}.2\sin 2x.2\cos 2x=-\sin 4x$ và $g'(x)=-\frac{3}{4}.2.\sin 2x.2.\cos 2x=-\frac{3}{2}\sin 4x$

Vì vậy, $3f'(x)-2g'(x)=-3\sin 4x-2.\left(-\frac{3}{2}\sin 4x\right)=0$

Ta có điều phải chứng minh

Bài 23. Ta có $y'=6\cos 2x-8\sin 2x+10$

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow 6\cos 2x-8\sin 2x+10=0\,(*)$

Ta thấy $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$ không là nghiệm của phương trình (*)

Đặt $t=\tan x$, phương trình (*) trở thành $6.\frac{1-t}{1+t^2}-8.\frac{2t}{1+t^2}+10=0\Leftrightarrow 4t^2-16t+16=0\Leftrightarrow t=2$

Với $t=2$ thì $\tan x=2\Leftrightarrow x=\arctan 2+k\pi; k\in Z$

Vậy phương trình $y'=0$ có nghiệm $x=\arctan 2+k\pi; k\in Z$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho đồ thị $(C): y = f(x)$, $M(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến Δ với (C) tại M là

$\Delta: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Trong đó $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $(y_0 = f(x_0))$.

$f'(x_0) = k$ là hệ số góc của tiếp tuyến $(k = y'(x_0) = f'(x_0))$.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

☑_ DẠNG 1. VIẾT PTTT KHI BIẾT TIẾP ĐIỂM (TẠI ĐIỂM M) HOẶC BIẾT HOÀNH ĐỘ, TUNG ĐỘ

PHƯƠNG PHÁP:

- **Bước 1.** Tính $y' = f'(x)$ và tính hệ số góc $k = f'(x_0)$
- **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(0;1)$ thuộc đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$.

Lời giải

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Ta có, $y' = 6x^2 - 6 \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(0) = -6$
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y = y'(0)(x - 0) + 1 \Rightarrow \Delta: y = -6x + 1$.

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1;-1)$ thuộc $(C): y = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

Lời giải

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Ta có, $y' = 9x^2 - 10x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = -1$
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y = -1(x - 1) - 1 \Rightarrow \Delta: y = -x$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1;1)$ thuộc $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$.

Lời giải

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Ta có, $y' = 6x^2 - 6 \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = 0$
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y = 1$.

Ví dụ 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(-2;5)$ thuộc $(C): y = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

Lời giải

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Ta có, $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(-2) = 2$
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y = 2(x + 2) + 5 = 2x + 9$.

Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(2;4)$ thuộc $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$.

Lời giải

- Ta có, $y'=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(2)=-1$

- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-(x-2)+4=-x+6$.

Ví dụ 6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(0;3)$ thuộc $(C):y=x+1-\dfrac{2}{2x-1}$.

Lời giải

- Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

- Ta có, $y'=1+\dfrac{4}{(2x-1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(0)=5$

- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=5(x-0)+3=5x+3$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. **1.** Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1;0)$ thuộc $(C):y=x^4-2x^2+1$.

ĐS: $\Delta:y=0$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(1;2)$ thuộc $(C):y=-x^4+3x^2$.

ĐS: $\Delta:y=2x$.

Bài 2. **1.** Cho hàm số $y=x^3-x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$. **ĐS:** $\Delta:y=5x+5$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=1$. **ĐS:** $\Delta:y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$. **ĐS:** $\Delta:y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=\dfrac{5}{2}$. **ĐS:** $\Delta:y=-8x+26$.

Bài 3. **1.** Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ $y_0=-1$. **ĐS:** $\Delta:y=x-2$.

2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ $y_0=3$. **ĐS:** $\Delta:y=-\dfrac{1}{2}x+5$.

3. Cho hàm số $y=2x^3+3x^2-1$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ $y_0=4$. **ĐS:** $\Delta:y=12x-8$.

4. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ $y_0 = 1$. **ĐS:** $\Delta: y = 9x + 28, y = 1$.

5. Cho hàm số $y = \sqrt{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ bằng 2. **ĐS:** $\Delta: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

6. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số tại điểm M có tung độ $y_0 = 0$. **ĐS:** $\Delta: y = 0$.

Bài 4. **1.** Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại giao điểm của nó với trục tung.

ĐS: $\Delta: y = -3x - 1$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{x+3}{x-1}$ tại giao điểm của nó với trục tung.

ĐS: $\Delta: y = -4x - 3$.

Bài 5. **1.** Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại giao điểm của nó với trục hoành.

ĐS: $\Delta: y = 4x + 2$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = 2x - \sqrt{2x^2+1}$ tại giao điểm của nó với trục hoành.

ĐS: $\Delta: y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 6. **1.** Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm của nó với đường thẳng $d: y - 2 = 0$. **ĐS:** $\Delta: y = 4x + 2$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ tại giao điểm của nó với đường thẳng $d: y + 1 = 0$. **ĐS:** $\Delta: y = -1, y = 3x - 1$.

3. Cho $(C): y = \frac{3-2x}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x - 3$ **ĐS:** $\Delta: y = -x + 1 - 1, y = -x - 3$.

4. Cho $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$ **ĐS:** $\Delta: y = 9x + 7$.

5. Cho $(C): y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{11}{8}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = 4x + 4$ có hoành độ dương. **ĐS:** $\Delta: y = 24x - 66$.

6. Cho $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x + 3$. **ĐS:** $y = -3x + 11, y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. **1.** Ta có, $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = 0$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y = 0$.

2. Ta có, $y' = -4x^3 + 6x \Rightarrow$ hệ số góc là $k = y'(1) = 2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=2(x-1)+2=2x$.

Bài 2. **1.** Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow M(-1;0)$

Ta có, $y'=3x^2-2x\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(-1)=5$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=5(x+1)+0=5x+5$.

2. Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Ta có, $y'=\frac{3}{(x+1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(1)=\frac{3}{4}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

3. Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

Ta có, $y'=\frac{-3}{(x+1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(-1)=-\frac{3}{4}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-\frac{3}{4}(x+1)+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.

4. Với $x_0=\frac{5}{2}\Rightarrow y_0=6\Rightarrow M\left(\frac{5}{2};6\right)$

Ta có, $y'=\frac{2}{(x-2)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'\left(\frac{5}{2}\right)=-8$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-8\left(x-\frac{5}{2}\right)+6=-8x+26$.

Bài 3. **1.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=-1\Rightarrow\frac{x_0-3}{x_0+1}=-1\Rightarrow x_0=1\Rightarrow M(1;-1)$.

Ta có, $y'=\frac{4}{(x+1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(1)=1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=1(x-1)-1=x-2$.

2. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=3\Rightarrow\frac{2x_0-2}{x_0-2}=3\Rightarrow x_0=4\Rightarrow M(4;3)$

Ta có, $y'=\frac{-2}{(x-2)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(4)=-\frac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-\frac{1}{2}(x-4)+3=-\frac{1}{2}x+5$.

3. $D=\mathbb{R}$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=4\Rightarrow 2x_0^3+3x_0^2-1=4\Rightarrow x_0=1\Rightarrow M(1;4)$

Ta có, $y'=6x^2+6x\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(1)=12$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=12(x-1)+4=12x+8$.

4. $D=\mathbb{R}$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=1\Rightarrow x_0^3+3x_0^2+1=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-3\\x_0=0\end{array}\right.\Rightarrow M_1(1;4),M_2(0;1)$.

Ta có, $y'=6x^2+6x$

Tại M_1 hệ số góc là $k=y'(-3)=9$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=9(x+3)+1=9x+28$.

Tại M_2 hệ số góc là $k=y'(0)=0$

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y=0(x+0)+1=1$.

5. $D=[-2;+\infty)$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=2\Rightarrow x_0=2\Rightarrow M(2;2)$.

Ta có, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(2)=\dfrac{1}{4}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=\dfrac{1}{4}(x-2)+2=\dfrac{1}{4}(x-2)+2=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$.

6. $D=\mathbb{R}$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là tiếp điểm

Với $y_0=0\Rightarrow x_0^4-2x_0^2+1=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=1\end{array}\right.\Rightarrow M_1(-1;0),M_2(1;0)$.

Ta có, $y'=4x^3-4x$

Tại M_1 hệ số góc là $k=y'(-1)=0$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=0(x+1)+0=0$.

Tại M_2 hệ số góc là $k=y'(1)=0$

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y=0(x+1)+0=0$.

Bài 4. **1.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $M(0;-1)$

Ta có, $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow$ hệ số góc là $k=y'(0)=-3$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-3(x-0)-1=-3x-1$.

2. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $M(0;-3)$

Ta có, $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}\Rightarrow k=y'(0)=-4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-4(x-0)-3=-4x-3$.

Bài 5. **1.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Tại giao điểm với trục hoành $y_0=0\Rightarrow\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}=0\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$

Ta có, $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow k=y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+0=4x+2$.

2. $D=\mathbb{R}$

Tại giao điểm với trục hoành $y_0=0\Rightarrow 2x-\sqrt{2x^2+1}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow M\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right)$

Ta có, $y'=2-\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\Rightarrow k=y'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=1\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 6. **1.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với $d: y-2=0$

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{x+2}{x+1}=2\Leftrightarrow x=0\Rightarrow M(0;2)$

Ta có, $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}\Rightarrow k=y'(0)=-1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là Δ: $y=-1(x-0)+2=-x+2$.

2. $D=\mathbb{R}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với $d: y+1=0$

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x-1=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0\end{array}\right.\Rightarrow M_1(-3;-1)$ và $M_2(0;-1)$

Ta có, $y'=x^2+4x+3$

Tại M_1 hệ số góc là $k=y'(-3)=0$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=0(x+3)-1=-1$.

Tại M_2 hệ số góc là $k=y'(0)=3$

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y=3(x-0)-1=3x-1$.

3. Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với d. Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{3-2x_0}{x_0-1}=x_0-3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$ (nhận) $\Rightarrow M_1(0;-3),M_2(2;-1)$.

Ta có, $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$

Tại M_1 hệ số góc là $k=y'(0)=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=-1(x-0)-3\Leftrightarrow y=-x-3$.

Tại M_2 hệ số góc là $k=y'(2)=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y=-1(x-2)-1=-x+1$.

4. - Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với d. Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$x_0^3-3x_0^2+2=-x_0-3\Leftrightarrow(x_0+1)\left[(x_0-2)^2+1\right]=0\Leftrightarrow x_0=-1\ \Rightarrow M(-1;-2)$

- Ta có, $y'=3x^2-6x\Rightarrow k=y'(1)=9$

- Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta_1: y=9(x+1)-2\Leftrightarrow y=9x+7$.

5. Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với d. Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{11}{8}=4x+4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{2}\\x=-\frac{1}{2}(L)\\x=-\frac{3}{2}(L)\end{array}\right.\Rightarrow M\left(\frac{7}{2};18\right)$$

Ta có, $y'=3x^2-3x-\dfrac{9}{4}\Rightarrow k=y'\left(\dfrac{7}{2}\right)=24$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta_1: y=24\left(x-\dfrac{7}{2}\right)+18\Leftrightarrow y=24x-66$.

6. Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của (C) với d. Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{2x+1}{x-1}=x+3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\Rightarrow M_1(2;5),M_2(-2;1)$

Ta có, $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta_1: y=24\left(x-\dfrac{7}{2}\right)+18\Leftrightarrow y=24x-66$.

Tại M_1 hệ số góc là $k_1=y'(2)=-3$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=-3(x-2)+5\Leftrightarrow y=-3x+11$.

Tại M_2 hệ số góc là $k_2=y'(-2)=-\dfrac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $\Delta_2: y=-\dfrac{1}{3}(x+2)+1=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

☑_ DẠNG 2. VIẾT PTTT KHI BIẾT HỆ SỐ GÓC HOẶC SONG SONG, VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

PHƯƠNG PHÁP:

- Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ là tiếp điểm.
- Ta có $k=y'\left(x_0\right)=a$, giải phương trình $y'\left(x_0\right)=a\Rightarrow x_0\Rightarrow y_0$.

Nhắc lại:

o $d_1: y=a_1x+b_1\Rightarrow k_{d_1}=a_1$

o $d_1: y=a_1x+b_1\Rightarrow k_{d_1}=a_1$

o $d_1//d_2\Rightarrow k_{d_1}=k_{d_2}\Leftrightarrow a_1=a_2$

o $d_1\perp d_2\Rightarrow k_{d_1}.k_{d_2}=-1\Leftrightarrow a_1.a_2=-1$

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ với $\left(C\right)$ biết hệ số góc $k=1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'\left(x_0\right)=k$

Ta có: $y'=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}\Rightarrow k=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=0\Rightarrow M_1\left(0;0\right)\\x_0=-2\Rightarrow y_0=2\Rightarrow M_2\left(-2;2\right)\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1: y=1\left(x-0\right)+0\Leftrightarrow y=x$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_2: y=1\left(x+2\right)+2\Leftrightarrow y=x+4$.

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến $\left(\Delta\right)$ của đồ thị $\left(C\right): y=x^3-3x+2$, biết tiếp tuyến song song với $\left(d\right): y=3x-2$.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ là tọa độ tiếp điểm của $\left(\Delta\right)$ với $\left(C\right)$.

Ta có $y'=2x-3$. Vì $\left(\Delta\right)\|\left(d\right)\Rightarrow y'\left(x_0\right)=3\Leftrightarrow 2x_0-3=3\Leftrightarrow x_0=3\Rightarrow y_0=2\Rightarrow M\left(3;2\right)$.

Phương trình tiếp tuyến $\left(\Delta\right)$ tại điểm M là $\left(\Delta\right): y=3\left(x-3\right)+2=3x-7$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $\left(C\right): y=x^2-x+2$, biết Δ vuông góc với $\left(d\right): 5y=-x+300$.

Lời giải

Ta có $5y=-x+300\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{5}x+600$

$\Rightarrow$hệ số góc của đường thẳng $\left(d\right)$ là $k_d=-\dfrac{1}{5}$.

Ta có $y'=2x-1$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến Δ.

Vì $\Delta\perp\left(d\right)\Leftrightarrow f'\left(x_0\right).k_d=-1\Leftrightarrow k_d.\left(2x_0-1\right)=-1\Leftrightarrow 2x_0-1=5\Leftrightarrow x_0=3$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 8 \\ f'(x_0) = 2x_0 - 1 = 5 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến $(\Delta): y = 5(x-3) + 8 = 5x - 7$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. **1.** Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 2$. **ĐS:** $\Delta_1: y = 2x - 1; \Delta_2: y = 2x + 7$.

2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = -3$. **ĐS:** $\Delta_1: y = -3x + 11; \Delta_2: y = -3x - 1$.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 3$. **ĐS:** $\Delta_1: y = 3x - 1; \Delta_2: y = 3x + 11$.

4. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 1$. **ĐS:** $\Delta_1: y = x + 1; \Delta_2: y = x + \dfrac{59}{27}$

5. Cho hàm số $y = -x^3 + 5x^2 - 3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 3$. **ĐS:** $\Delta_1: y = 3x + 6; \Delta_2: y = 3x - \dfrac{94}{27}$.

6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C), biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -1$. **ĐS:** $y = -x - 2$ và $y = -x + 6$.

7. Với $(C): y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C), biết $k = -1$.

ĐS: $y = -x + 4$ và $y = -x - 4$.

8. Cho hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \dfrac{1}{3}$. **ĐS:** $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

Bài 2. **1.** Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{4}{3}$, biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 4x - y + 2 = 0$. **ĐS:** $y = 4x - \dfrac{26}{3}$ và $y = 4x + \dfrac{73}{6}$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \dfrac{2x+1}{1-2x}$, biết Δ song song với đường thẳng $(d): y = 4x - y - 8 = 0$. **ĐS:** $\Delta_1: y = 4x - 7$, $\Delta_2: y = 4x + 1$.

3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): 3x - y - 10 = 0$. **ĐS:** $\Delta: y = 3x + 11$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \dfrac{3x-1}{x+2}$, biết tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $d: y = x - 7y + 3 = 0$.

ĐS: $x-7y+9=0$, $x-7y+37=0$.

5. Cho hàm số $y=\sqrt{1-x-x^2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:x+2y=0$. **ĐS:** $\Delta:x+2y-2=0$.

Bài 3. **1.** Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ của đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C), biết Δ vuông góc với đường thẳng $(d):x+9y=0$.

ĐS: $y=9x-7$ và $y=9x+25$.

2. Cho hàm số $y=-x^4-x^2+6$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:6x-y-1=0$. **ĐS:** $\Delta:y=6x+10$.

3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C):y=\dfrac{x-1}{x+1}$, biết Δ vuông góc với đường thẳng $d:x+2y-1=0$. **ĐS:** $\Delta_1:y=2x-1$, $\Delta_2:y=2x+7$.

4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C):y=\dfrac{2x-1}{1-4x}$, biết Δ vuông góc với đường thẳng $d:x-2y+10=0$. **ĐS:** $\Delta:y=-2x-1$ hoặc $\Delta:y=-2x+1$.

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. **1.** Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=k$

Ta có: $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow k=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M_1(0;-1)\\x_0=-2\Rightarrow y_0=3\Rightarrow M_2(-2;3)\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_1: $y=2(x-0)-1\Leftrightarrow y=2x-1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_2: $y=2(x+2)+3\Leftrightarrow y=2x+7$.

2. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=k$

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}\Rightarrow k=\dfrac{-3}{(x_0+1)^2}=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M_1(0;-1)\\x_0=2\Rightarrow y_0=5\Rightarrow M_2(2;5)\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_1: $y=-3.(x-0)-1\Leftrightarrow y=-3x-1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_2: $y=-3.(x-2)+5\Leftrightarrow y=-3x+11$.

3. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=k$

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}\Rightarrow k=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M_1(0;-1)\\x_0=-2\Rightarrow y_0=5\Rightarrow M_2(-2;5)\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_1: $y=3.(x-0)-1\Leftrightarrow y=3x-1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là Δ_2: $y=3.(x+2)+5\Leftrightarrow y=3x+11$.

4. Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=k$

Ta có: $y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow k = 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow M_1(1;2) \\ x_0 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \dfrac{50}{27} \Rightarrow M_2\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{50}{27}\right) \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_1 :\ y = 1.(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là $\Delta_2 :\ y = 1.\left(x + \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{50}{27} \Leftrightarrow y = x + \dfrac{59}{27}$.

5. - Tập xác định $D = \mathbb{R}$

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = k$

- Ta có: $y' = -3x^2 + 10x \Rightarrow k = -3x_0^2 + 10x_0 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 15 \Rightarrow (\Delta): y = 3(x-3) + 15 = 3x + 6$.

Với $x_0 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y_0 = \dfrac{67}{27} \Rightarrow (\Delta): y = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{67}{27} = 3x - \dfrac{94}{27}$.

6. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến (d) có giá trị là $k = 1$ nên ta có phương trình sau

$\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

- Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow (d): y = -x - 2$.

- Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow (d): y = -(x-2) + 4 = -x + 6.$.

7. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 5x + 3 - (x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$..

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1 nên

$\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 1 = -x_0^2 + 2x_0 - 1 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

- Khi $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -4 \Rightarrow (d): y = -x - 4$

- Khi $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow (d): y = -(x-2) + 2 = -x + 4$.

8. Tập xác định: $D = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tọa độ tiếp điểm của (Δ) với (C). Vì hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\frac{1}{3}$ nên $\frac{1}{\sqrt{2x_0+1}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x_0=4$.

Khi $x_0=4\Rightarrow y_0=3$, khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $(\Delta): y=\frac{1}{3}(x-4)+3=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

Bài 2. **1.** Ta có $(d): y=4x+2\Rightarrow$ hệ số góc của (d) là $k_d=4$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị hàm số (C).

Ta có $y'=x^2+x-2$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)=x_0^2+x_0-2$.

Vì tiếp tuyến (Δ) vuông góc với (d) nên $f'(x_0)=k_d\Leftrightarrow x_0^2+x_0-2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-3\\x_0=2\end{array}\right.$.

- Với $x_0=2\Rightarrow y_0=-\frac{2}{3}\Rightarrow(\Delta): y=4(x-2)-\frac{2}{3}=4x-\frac{26}{3}$.

- Với $x_0=-3\Rightarrow y_0=\frac{1}{6}\Rightarrow(\Delta): y=4(x+3)+\frac{1}{6}=4x+\frac{73}{6}$.

2. Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0+1}{1-2x_0}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=\frac{4}{(1-2x_0)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên

$y'(x_0)=4\Leftrightarrow\frac{4}{(1-2x_0)^2}=4\Leftrightarrow(1-2x_0)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=1.\end{array}\right.$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là $y=4(x-0)+1\Leftrightarrow y=4x+1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là $y=4(x-1)+(-3)\Leftrightarrow y=4x-7$.

3. Gọi $M(x_0;x_0^3-3x_0^2+6x_0+10)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=3x_0^2-6x_0+6$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0)=3\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0+6=3\Leftrightarrow x_0=1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là $y=3(x-1)+14\Leftrightarrow y=3x+11$.

4. Gọi $M\left(x_0;\frac{3x_0-1}{x_0+2}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=\frac{7}{(x_0+2)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên

$y'(x_0)=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{7}{(x_0+2)^2}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow(x_0+2)^2=49\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-9.\end{array}\right.$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=5$ là

$y=\frac{1}{7}(x-5)+2\Leftrightarrow y=\frac{1}{7}x+\frac{9}{7}\Leftrightarrow x-7y+9=0$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-9$ là $y=\frac{1}{7}(x+9)+4\Leftrightarrow x-7y+37=0.$.

Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ của đồ thị (C).

5. Gọi $M\left(x_0;\sqrt{1-x_0-x_0^2}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=\frac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}}$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên

$$y'(x_0)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+2x_0=\sqrt{1-x_0-x_0^2}\Rightarrow(1+2x_0)^2=1-x_0-x_0^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-1\end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có $x_0=0$ thỏa mãn. Vậy nghiệm của phương trình là $x_0=0$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là $y=-\frac{1}{2}(x-0)+1\Leftrightarrow x+2y-2=0.$.

Bài 3. **1.** Ta có $(d):y=-\frac{1}{9}x\Rightarrow$ hệ số góc của (d) là $k_d=-9$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến (Δ) với đồ thị hàm số (C).

Ta có $y'=3x^2+6x$. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$.

Vì tiếp tuyến (Δ) vuông góc với (d) nên

$$f'(x_0).k_d=-1\Leftrightarrow(3x_0^2+6x_0)\left(-\frac{1}{9}\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-3\end{array}\right..$$

- Với $x_0=1\Rightarrow y_0=2$ và $f'(x_0)=9\Rightarrow(\Delta):y=9(x-1)+2=9x-7$.

- Với $x_0=-3\Rightarrow y_0=-2$ và $f'(x_0)=9\Rightarrow(\Delta):y=9(x+3)-2=9x+25$.

2. Gọi $M(x_0;-x_0^4-x_0^2+6)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=-4x_0^3-2x_0$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên $y'(x_0)=6\Leftrightarrow-4x_0^3-2x_0=6\Leftrightarrow x_0=-1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là $y=6(x+1)+4\Leftrightarrow y=6x+10$.

3. Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'(x_0)=\frac{2}{(x_0+1)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên

$$y'(x_0).\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow y'(x_0)=2\Leftrightarrow\frac{2}{(x_0+1)^2}=2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2.\end{array}\right..$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là $y=2(x-0)-1\Leftrightarrow y=2x-1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ là $y=2(x+2)+3\Leftrightarrow y=2x+7$.

4. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{1-4x_0}\right)$ là tọa độ của tiếp điểm.

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại M là: $y'\left(x_0\right)=\dfrac{-2}{\left(1-4x_0\right)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên

$$y'\left(x_0\right).\left(\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow y'\left(x_0\right)=-2\Leftrightarrow\frac{-2}{\left(1-4x_0\right)^2}=-2\Leftrightarrow\left(1-4x_0\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=0$ là $y=-2\left(x-0\right)-1\Leftrightarrow y=-2x-1.$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$ là $y=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+0\Leftrightarrow y=-2x+1$.

☑_DẠNG 3. BÀI TOÁN VỀ XÁC ĐỊNH HỆ SỐ GÓC NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $\left(C\right):y=x^3+6x^2-9x+5$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'=3x^2+12x-9.$. Suy ra hệ số góc $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2+12x_0-9.$

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1: Áp dụng $\left(a\pm b\right)^2+c\ge c\Rightarrow k_{\min}=c$

Ta có $k=3x_0^2+12x_0-9=3\left(x_0^2+4x_0+4\right)-21=3\left(x_0+2\right)^2-21\ge-21\Rightarrow k_{\min}=-21.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0+2=x_0=-2.$

Cách 2: Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

x_0	$-\infty$	-2	$+\infty$
k	$+\infty$ ↘	-21	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0=-2,k_{\min}=y'\left(-2\right)=-21$

Cách 3: Sử dụng công thức

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}k_{\min}=y'(x_0),\ y''\left(x_0\right)=0\\k_{\max}=y'(x_0),\ y''\left(x_0\right)=0\end{array}\right.}$$

$y''\left(x_0\right)=6x_0+12=0\Rightarrow x_0=-2\Rightarrow k_{\min}=y''\left(-2\right)=-21.$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0=-2\Rightarrow y_0=39\Rightarrow M\left(-2;39\right).$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M\left(-2;39\right):y=k_{\min}.\left(x+2\right)+39=-21\left(x+2\right)+39=-21x-3$.

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $\left(C\right):y=-x^3+6x^2-3x+2$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y' = -3x^2+12x-3.$. Suy ra hệ số góc $k = y'\left(x_0\right) = -3x_0^2+12x_0-3$

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1: Áp dụng $-\left(a\pm b\right)^2+c\ge c\Rightarrow k_{\max}=c$

Ta có $k=-3x_0^2+12x_0-3=-3\left(x_0^2-4x_0+4\right)+9=-3\left(x_0-2\right)^2+9\le 9\Rightarrow k_{\max}=9$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0-2=x_0=2$

Cách 2: Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

x_0	$-\infty$	2	$+\infty$
k	$-\infty$ ↗	9	↘ $-\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0=2, k_{\max}=y'(2)=9$

Cách 3: Sử dụng công thức

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} k_{\min}=y'(x_0),\ y''\left(x_0\right)=0 \\ k_{\max}=y'(x_0),\ y''\left(x_0\right)=0 \end{array}\right.}$$

$y''(x_0)=-6x_0+12=0\Rightarrow x_0=2\Rightarrow k_{\max}=y'(2)=9$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0=2\Rightarrow y_0=8\Rightarrow M(2;8)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(2,8)$: $y=k_{\max}.(x-2)+8=9(x-2)+8=9x-10$

Nhận xét: *Thông thường ta dùng cách 1. Cách 2, cách 3 thường dùng trong trắc nghiệm hoặc Câu toán chứa tham số m.*

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2+1,$ biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

ĐS: $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{4}.$

Lời giải

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'=6x^2-6x.$ Suy ra hệ số góc $k=y'(x_0)=6x_0^2-6x_0.$

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1: Áp dụng $(a\pm b)^2+c\ge c\Rightarrow k_{\min}=c$

Ta có $k=6x_0^2-6x_0=6(x_0^2-x_0+\dfrac{1}{4})-\dfrac{3}{2}=6\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}\ge -\dfrac{3}{2}\Rightarrow k_{\min}=-\dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

x_0	$-\infty$	$\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
k	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{2}, k_{\min}=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

Cách 3:

Sử dụng công thức

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} k_{\min}=y'(x_0), y''(x_0)=0 \\ k_{\max}=y'(x_0), y''(x_0)=0 \end{array}\right.}$$

$y''(x_0)=12x_0-6=0 \Rightarrow x_0=\dfrac{1}{2} \Rightarrow k_{\min}=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0=\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right): y=k_{\min}.\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{4}$.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^3-3x^2+1,$ biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất.

ĐS: $y=-3x+2.$

Lời giải

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'=3x^2-6x$. Suy ra hệ số góc $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Xác định hệ số góc nhỏ nhất:

Cách 1: Áp dụng $(a\pm b)^2+c\ge c \Rightarrow k_{\min}=c$

Ta có $k=3x_0^2-6x_0=3(x_0^2-2x_0+1)-3=3(x_0-1)^2-3\ge -3 \Rightarrow k_{\min}=-3$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1.$

Cách 2: Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

x_0	$-\infty$	1	$+\infty$
k	$+\infty$ $\searrow$	-3	$\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0=1, k_{\min}=y'(1)=-3$

Cách 3: Sử dụng công thức

$$\left[\begin{array}{l} k_{\min} = y'(x_0),\ y''(x_0)=0 \\ k_{\max} = y'(x_0),\ y''(x_0)=0 \end{array}\right.$$

$y''(x_0)=6x_0-6=0 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow k_{\min}=y'(1)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0=1 \Rightarrow y_0=-1 \Rightarrow M(1,-1)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(1,-1): y=k_{\min}.(x-1)-1=-3(x-1)-1=-3x+2$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=-2x^3+3x^2-6x+1$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

ĐS: $y=-\frac{9}{2}x+\frac{3}{4}$

Lời giải

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'=-6x^2+6x-6.$ Suy ra hệ số góc $k=y'(x_0)=-6x_0^2+6x_0-6$

Xác định hệ số góc lớn nhất:

Cách 1: Áp dụng $-(a\pm b)^2+c\ge c \Rightarrow k_{\max}=c$

Ta có $k=-6x_0^2+6x_0-6=-6\left(x_0^2-x_0+\frac{1}{4}\right)-\frac{9}{2}=-3\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\le-\frac{9}{2}\Rightarrow k_{\max}=-\frac{9}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$

Cách 2: Áp dụng công thức đỉnh parabol $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

x_0	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
k	$-\infty$ ↗	$-\frac{9}{2}$	↘ $-\infty$

Từ bảng biến thiên của parabol $\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}, k_{\max}=y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

Cách 3: Sử dụng công thức

$$\left[\begin{array}{l} k_{\min} = y'(x_0),\ y''(x_0)=0 \\ k_{\max} = y'(x_0),\ y''(x_0)=0. \end{array}\right.$$

$y''(x_0)=-12x_0+6=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{2} \Rightarrow k_{\max}=y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

Phương trình tiếp tuyến:

Ta có: $x_0=\frac{1}{2} \Rightarrow y_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right): y=k_{\max}.\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}x+\frac{3}{4}$.

☑_ DẠNG 4. VIẾT PTTT KHI BIẾT ĐIỂM MÀ TIẾP TUYẾN ĐI QUA

PHƯƠNG PHÁP:

- Bước 1: Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm
- Bước 2: Ta có PTTT $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$
- Bước 3: Vì TT đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ nên ta có: $y_A = y'(x_0)(x_A - x_0) + y(x_0)$
- Bước 4: Giải phương trình ta tìm được x_0

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(0;1)$.

Lời giải

Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 6 \end{cases}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$.

Mà $M(0;1) \in \Delta$ nên $(3x_0^{\ 2} + 6x_0 - 6)(0 - x_0) + x_0^{\ 3} + 3x_0^{\ 2} - 6x_0 + 1 = 1$

$\Leftrightarrow -2x_0^{\ 3} - 3x_0^{\ 2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Thế $x_0 = 0, x = -\dfrac{3}{2}$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = -6x, \Delta_2 : y = -\dfrac{33}{4}x + 1$.

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = 2x^4 - 4x^2 - 1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(1;-3)$.

Lời giải

- Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0 = 2x_0^{\ 4} - 4x_0^{\ 2} - 1 \\ y'(x_0) = 8x_0^{\ 3} - 8x_0 \end{cases}$

- Phương trình tiếp tuyến Δ

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = (8x_0^{\ 3} - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^{\ 4} - 4x_0^{\ 2} - 1$

$y = (8x_0^{\ 3} - 8x_0)(x - x_0) + 2x_0^{\ 4} - 4x_0^{\ 2} - 1$.

Mà $M(1;-3) \in \Delta$ nên $(8x_0^{\ 3} - 8x_0)(1 - x_0) + 2x_0^{\ 4} - 4x_0^{\ 2} - 1 = -3 \Leftrightarrow -6x_0^{\ 4} + 8x_0^{\ 3} + 4x_0^{\ 2} + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{1}{3} \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{array}\right.$

- Thế $x_0 = -1, x_0 = \dfrac{1}{3}, x_0 = 1$ vào phương trình tiếp tuyến ta được. $\Delta_1 : y = -3, \Delta_2 : y = -\dfrac{64}{27}x - \dfrac{17}{27}$

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;3)$.

Lời giải

Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \\ y'(x_0)=\dfrac{1}{(x_0+1)^2} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hay $y=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0+1}$.

Mà $M(-1;3)\in\Delta$ nên

$$\frac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}=3 \Leftrightarrow 3=\frac{2x_0}{x_0+1}\Rightarrow x_0=-3$$

Thế $x_0=-3$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta: y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$.

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^3-3x^2-9x+1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1;6)$. **ĐS:** $\Delta_1: y=6$ và $\Delta_2: y=-9x-3$.

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^3-2x^2+x+4$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-4;-24)$. **ĐS:** $\Delta_1: y=133x+508, \Delta_2: y=8x+8$ và $\Delta_3: y=5x-4$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^4+x^2+1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1;3)$. **ĐS:** $\Delta: y=-6x-3$.

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-7;5)$. **ĐS:** $\Delta_1: y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$ và $\Delta_2: y=-\dfrac{3}{16}x+\dfrac{59}{16}$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1;4)$. **ĐS:** $\Delta: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^3+3x^2-6x+1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(0;1)$. **ĐS:** $\Delta_1: y=6, \Delta_2: y=-9x-3$.

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y=x^3-3x^2-9x+1$ biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1;6)$. **ĐS:** $\Delta_1: y=6, \Delta_2: y=-9x-3$.

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0=x_0^3-3x_0^2-9x_0+1 \\ y'(x_0)=3x_0^2-6x_0-9 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay

$(3x_0^2 - 6x_0 - 9)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 = 6 \Leftrightarrow -2x_0^3 + 6x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

$y = (3x_0^2 - 6x_0 - 9)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1$.

Mà $M(-1;6) \in \Delta$ nên $(3x_0^2 - 6x_0 - 9)(-1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 - 9x_0 + 1 = 6$

$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 6x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Thế $x_0 = -1, x_0 = 2$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = 6$ và $\Delta_2 : y = -9x - 3$.

Bài 2. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0 = x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4 \\ y'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 1 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = (3x_0^2 - 4x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^3 - 2x_0^2 + x_0 + 4$.

Mà $M(-4;-24) \in \Delta$ nên $(3x_0^2 + 6x_0 - 6)(0 - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow -2x_0^3 - 3x_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Thế $x_0 = 0, x_0 = -\dfrac{3}{2}$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1 : y = 133x + 508, \Delta_2 : y = 8x + 8$ và $\Delta_3 : y = 5x - 4$.

Bài 3. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0 = \dfrac{2x_0 + 1}{x_0 + 1} \\ y'(x_0) = \dfrac{1}{(x_0 + 1)^2} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = (4x_0^3 + 2x_0)(x - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1$.

Mà $M(-1;3) \in \Delta$ nên

$(4x_0^3 + 2x_0)(-1 - x_0) + x_0^4 + x_0^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow -3x_0^4 - 4x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Thế $x_0 = -1$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta : y = -6x - 3$.

Bài 4. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0 = \dfrac{2x_0 + 1}{x_0 - 1} \\ y'(x_0) = \dfrac{-3}{(x_0 - 1)^2} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ hay $y = \dfrac{-3}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0 + 1}{x_0 - 1}$.

Mà $M(-7;5) \in \Delta$ nên

$$\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}=5$$

$\Leftrightarrow 3x_0^2-12x_0-15=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=5 \end{array}\right.$

Thế $x_0=-1, x_0=5$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1: y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ và

$\Delta_2: y=-\frac{3}{16}x+\frac{59}{16}$.

Bài 5. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0=\dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \\ y'(x_0)=\dfrac{1}{(x_0+1)^2} \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hay $y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Mà $M(-1;4)\in\Delta$ nên

$$\frac{3}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}=4$$

$\Leftrightarrow 2x_0=-8$

$\Rightarrow x_0=-4$

Thế $x_0=-4$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta: y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$.

Bài 6. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0=x_0^3+3x_0^2-6x_0+1 \\ y'(x_0)=3x_0^2+6x_0-6 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hay $y=(3x_0^2-6x_0-9)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2-9x_0+1$.

Mà $M(0;1)\in\Delta$ nên

$(3x_0^2+6x_0-6)(0-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1=1$

$\Leftrightarrow -2x_0^3-3x_0^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Thế $x_0=-1, x_0=2$ $x_0=0, x_0=-\frac{3}{2}$ vào phương trình tiếp tuyến ta được

$\Delta_1: y=6, \Delta_2: y=-9x-3$.

Bài 7. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_0. Suy ra $\begin{cases} y_0=x_0^3-3x_0^2-9x_0+1 \\ y'(x_0)=3x_0^2-6x_0-9 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến Δ

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hay $y=(3x_0^{\ 2}-6x_0-9)(x-x_0)+x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}-9x_0+1$

$y=(3x_0^{\ 2}-6x_0-9)(x-x_0)+x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}-9x_0+1$.

Mà $M(-1;6)\in\Delta$ nên

$(3x_0^{\ 2}-6x_0-9)(0-x_0)+x_0^{\ 3}-3x_0^{\ 2}-9x_0+1=6$

$\Leftrightarrow -2x_0^{\ 3}+6x_0+4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=2 \end{array}\right.$

Thế $x_0=-1, x_0=2$ vào phương trình tiếp tuyến ta được $\Delta_1: y=6, \Delta_2: y=-9x-3$.

☑_ DẠNG 5. TÌM THAM SỐ m ĐỂ TỪ 1 ĐIỂM TA KẺ ĐƯỢC ĐÚNG MỘT TIẾP TUYẾN ĐẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Tìm tổng tất cả các giá trị của a để từ điểm $A(a;1)$ kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$. **ĐS:** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(a;1)$ là $y=k(x-a)+1$.

Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} k(x-a)+1=\dfrac{-x+2}{x-1} \\ k=-\dfrac{1}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a-x}{(x-1)^2}+1=\dfrac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow 2x^2-6x+3+a=0 \ (*)$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta'=3-2a=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2}\neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta'=3-2a>0 \\ 2-6+3+a=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{2} \\ a=1 \end{array}\right..$$

Tổng các giá trị của a là $\dfrac{5}{2}$.

Bài 2. Tìm m để từ $A(-2;m)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. **ĐS:** $m=1, m=2$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(-2;m)$ là $y=k(x+2)+m$.

Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} k(x+2)+m=\dfrac{2x+1}{x-1} \\ k=-\dfrac{3}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow -3.\dfrac{x+2}{(x-1)^2}+m=\dfrac{2x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow -3x-6+m(x^2-2x+1)=(2x+1)(x-1) \Leftrightarrow (m-2)x^2+(-2-2m)x+m-5=0 \ (*)$.

$(*)$ có $\Delta' = (-m-1)^2 - (m-5)(m-2) = 9m-9$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc có 1 nghiệm khác 1.

- Nếu $(*)$ có 1 nghiệm. Khi đó $m=2$.

Thế $m=2$ vào $(*)$, ta được $-6x-3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thoả $x\neq 1$) nên nhận $m=2$.

- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì $\Delta' = 9m-9=0 \Leftrightarrow m=1$.

Khi đó nghiệm của phương trình là $-\frac{b}{2a} = \frac{2+2}{2(1-2)} = -2 \neq 1$ nên nhận $m=1$.

- Nếu $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m>1$.

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $m-2-2-2m+m-5=0$ $\Leftrightarrow -9=0$ (vô lý).

Vậy $m=1$ và $m=2$ thoả mãn yêu cầu câu toán.

Bài 3. Tìm m để từ $A(-1;2)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\frac{x-m}{x-1}$. **ĐS:** $m=3$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(-1;2)$ là $y=k(x+1)+2$.

Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} k(x+1)+2 = \frac{x-m}{x-1} \\ k = -\frac{-1+m}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(m-1)}{(x-1)^2} + 2 = (x-m)(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 + (2m-4)x + 1 = 0 \quad (*)$.

$(*)$ có $\Delta' = (m-2)^2 - 1 = m^2 - 4m + 3$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Với $m=1$ thì nghiệm phương trình là $-\frac{b}{2a} = 1$ (loại).

Với $m=3$ thì nghiệm phương trình là $-\frac{b}{2a} = -1 \neq 1$ (nhận $m=3$).

- Nếu $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $1+2m-4+1=0 \Leftrightarrow m=1$ (không thoả $m<1$).

Vậy $m=3$ thoả mãn yêu cầu Câu toán.

Bài 4. Tìm m để từ $A(0;m)$ kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$. **ĐS:** $m=1, m=-2$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq 1$.

Tiếp tuyến qua $A(0;m)$ là $y=kx+m$.

Điều kiện tiếp xúc $\begin{cases} kx+m=\dfrac{x+2}{x-1} \\ k=-\dfrac{3}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow -3x+m(x-1)^2=(x-2)(x-1)$

$\Leftrightarrow (m-1)x^2+(-2m-4)x+m+2=0\ \ (*)$.

$(*)$ có $\Delta'=(m+2)^2-(m-1)(m+2)=3m+6$.

Để từ A kẻ đúng 1 tiếp tuyến đến đồ thị thì $(*)$ phải có nghiệm kép $\neq 1$ hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1 hoặc có 1 nghiệm khác 1.

- Nếu $m=1$ thì $(*)$ trở thành $-6x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\neq 1$ nên nhận $m=1$.

- Nếu $m\neq 1$ và $\Delta'=3m+6=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Khi đó phương trình có nghiệm kép là $-\dfrac{b}{2a}=0\neq 1$ nên nhận $m=-2$.

- Nếu $m\neq 1$ và $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>-2$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Để phương trình có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm khác 1 thì $m-1-2m-4+m+2=0$

$\Leftrightarrow -3=0$ (vô lý).

Vậy $m=1$ và $m=-2$ thoả mãn yêu cầu câu toán.

TỔNG HỢP KIẾN THỨC CẦN NHỚ VỀ TIẾP TUYẾN

1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0,y_0)$.

♦ **Bước 1:** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Suy ra hệ số góc tiếp tuyến $k=y'(x_0)=f'(x_0)$.

♦ **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0,y_0)$ có dạng $d: y=k(x-x_0)+y_0$.

☑ Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0=f(x_0)$. Tương tự khi đề cho y_0.

☑ Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm đồ thị $(C): y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=ax+b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C). Đặc biệt $Ox: y=0$, trục tung $Oy: x=0$.

☑ Nếu đề bài cho hệ số góc tiếp tuyến là k, ta làm theo các bước sau:

- Bước 1: Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính $y'=f'(x)$.

- Bước 2: Ta có: $k=f'(x_0)$ và giải phương trình này ta sẽ tìm được x_0, suy ra y_0.

- Bước 3: Ứng với mỗi tiếp điểm, ta tìm được một tiếp tuyến $d: y=k(x-x_0)+y_0$.

☑ Ngoài ra đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới dạng sau:

- Nếu tiếp tuyến $d // \Delta: y=ax+b \Rightarrow k=a$

- Nếu tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

- Nếu tiếp tuyến tạo với trục hoành Ox một góc α thì $k = \tan\alpha$ (hoặc $k = -\tan\alpha$).

- Nếu tiếp tuyến tạo với $d: y = ax + b$ một góc α thì $\dfrac{k-a}{1+ka} = \tan\alpha$ (hoặc $-\tan\alpha$).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ kẻ từ $A(x_A; y_A)$ (qua A).

♦ **Bước 1:** Gọi $M(a; f(a))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(a) = f'(a)$ theo a

♦ **Bước 2:** Tiếp tuyến dạng $d: y = f'(a)(x-a) + y(a) (*)$.

Vì điểm $A(x_A; y_A) \in d \Leftrightarrow y_A = f'(a)(x_A - a) + y(a)$ và giải được a.

♦ **Bước 3:** Thế a vào $(*)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

3. Điều kiện tiếp xúc của hai đường cong.

Cho hai đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x).(*)$.

- Phương trình $(*)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm chung của (C) và (C').

- Số nghiệm của $(*)$ chính là số điểm chung của hai đồthị hàm số.

- Trục hoành Ox có phương trình $y = 0$, trục tung Oy có phương trình $x = 0$.

- Điều kiện tiếp xúc: (C) tiếp xúc với $(C') \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

- Từ điểm A kẻ được n tiếp tuyến đến (C) khi hệ tiếp xúc có n nghiệm phân biệt.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 2. Tiếp tuyến của đò thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-5}$ tại điểm $A(-1;0)$ có hệ số góc bằng

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{6}{25}$. **D.** $-\dfrac{6}{25}$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(-1;-2)$ là

A. $y = 9x + 11$. **B.** $y = 9x - 11$. **C.** $y = 9x - 7$. **D.** $y = 9x + 7$.

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 4$ tại điểm $A(1;2)$ là

A. $y = 3x + 5$. **B.** $y = 2x + 4$. **C.** $y = -2x + 4$. **D.** $y = -2x$.

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $M(0;-1)$ là

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x-1$. **C.** $y=-3x-1$. **D.** $y=-3x+1$.

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ tại điểm $A\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $y=\frac{1}{2}x$. **B.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$. **C.** $y-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$. **D.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $M(0;1)$ là

A. $y=\frac{1}{2}x+1$. **B.** $y=-\frac{1}{2}x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0=-3$

A. $y=30x+25$. **B.** $y=9x-25$. **C.** $y=30x-25$. **D.** $y=9x+25$.

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=-8x-6$. **B.** $y=8x-6$. **C.** $y=-8x+10$. **D.** $y=8x+10$.

Câu 10. Tiếp tuyến của đồthị hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là

A. $y=-x-3$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=-x-1$.

Câu 11. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0)=0$ là

A. $y=-3x+3$. **B.** $y=9x+7$. **C.** $y=9x-7$. **D.** $y=-3x-3$.

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ x_0 thỏa mãn $2y''(x_0)+y'(x_0)+15=0$ là

A. $y=9x+7$. **B.** $y=9x+6$. **C.** $y=9x$. **D.** $y=9x+1$.

Câu 13. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+1$ tại điểm có tung độ bằng 2

A. $y=2x$. **B.** $y=9x-11$.

C. $y=54x+32$. **D.** $y=-3x-3$.

Câu 14. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ tại điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y=20x-35$. **B.** $y=-20x-35$ và $y=20x+35$.

C. $y=20x-35$ và $y=-20x-35$. **D.** $y=-20x+35$.

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồthị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-4}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

A. $x+4y-20=0$. **B.** $x+4y-5=0$. **C.** $4x+y-2=0$.

D. $4x+y-5=0$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=\dfrac{3}{2}x^4+x^2-1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+8y+16=0$.

A. $y=-8x+\frac{13}{2}$. **B.** $y=8x+\frac{13}{2}$. **C.** $y=-8x-\frac{13}{2}$. **D.** $y=8x-\frac{13}{2}$.

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=2x^3-6x^2+3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $6x+y-5=0$. **B.** $6x+y+5=0$. **C.** $6x-y+3=0$. **D.** $6x+y-7=0$.

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y=-x^3+3x^2-5x+1$ có hệ số góc lớn nhất là

A. $2x-y=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^3+x^2-1$ có đồ thị (C), phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;1)$ cắt (C) tại điểm B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $4\sqrt{26}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{105}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ tiếp điểm bằng tung độ tiếp điểm.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=-2x-2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Câu 21. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ đi qua điểm $A(-1;4)$ có phương trình là

A. $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$. **B.** $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$. **C.** $y=\dfrac{1}{3}x+4$. **D.** $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{13}{3}$.

Câu 22. Cho hàm số $y=x^3+mx^2+x+1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thịa àm số tại M có hoành độ $x=1$. Tìm tham số m để thỏa mãn $k\cdot f(-1)<0$.

A. $m>2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 23. Gọi d_1,d_2 là hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-6x-1$ tại hai điểm lần lượt có hoành độ là x_1 và x_2. Biết x_1,x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2+mx-3=0$. Tìm tham số m để d_1 song song d_2.

A. $m=-1$. **B.** $10m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Câu 24. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+3mx+1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1;3)$.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 25. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-mx^2+3m+1$ tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua điểm $A(0;2)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Câu 26. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-(2m+1)x^2+m+2$ có hoành độ bằng 1. Hỏi giá trị của tham số m thuộc khoảng nào thì tiếp tuyến tại điểm M sẽ vuông góc với đường thẳng d có phương trình $y=x-4y-2018=0$.

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;0)$. **C.** $[0;5)$. **D.** $[5;+\infty)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x-1}$ có đồ thị (C_m) và điểm $A(-1;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có đúng một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 28. Tiếp tuyến tại điểm là nghiệm $y'=0$ của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ thì

A. Song song với đường thẳng. **B.** Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc dương. **D.** Có hệ số góc bằng -1.

Câu 29. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=x^4-8x^2+2$ tại điểm có hoành độ $x_0=\sqrt{2}$ bằng

A. $-6\sqrt{2}$. **B.** $-7\sqrt{2}$. **C.** $-8\sqrt{2}$. **D.** $-9\sqrt{2}$.

Câu 30. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^3-2x+1$ tại điểm $M(-1;2)$ bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 25. **D.** 1.

Câu 31. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ có hệ số góc bằng

A. -4. **B.** $\frac{47}{12}$. **C.** $-\frac{13}{4}$. **D.** $-\frac{17}{4}$.

Câu 32. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 33. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại điểm $A(1;0)$ là

A. $y=-3x+3$. **B.** $y=-3x+1$. **C.** $y=3x+1$. **D.** $y=3x+3$.

Câu 34. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=\frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là

A. $y=-3x+9$. **B.** $y=-x+5$. **C.** $y=3x-5$. **D.** $y=x+1$.

Câu 35. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=\frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là

A. $y=-3x-5$. **B.** $y=3x+13$. **C.** $y=3x+5$. **D.** $y=-3x+13$.

Câu 36. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 là

A. $y=-12x-7$. **B.** $y=12x-7$. **C.** $y=-12x+17$. **D.** $y=12x+17$.

Câu 37. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y=x^3-3x^2+9$ tại điểm có hoành độ bằng 9 là

A. $y=1$ và $y=9x-1$. **B.** $y=19$ và $y=9x-8$.
C. $y=9$ và $y=9x-18$. **D.** $y=0$ và $y=9x-1$.

Câu 38. Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị $y=\frac{2x-4}{x-3}$ với trục hoành là

A. $y=2x$. **B.** $y=-2x+4$. **C.** $y=-2x-4$. **D.** $y=2x-4$.

Câu 39. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 5.

A. $y=-5x+2$ và $y=-5x+22$. **B.** $y=-5x+2$ và $y-5x-22$.
C. $y=5x+2$ và $y=-5x+22$. **D.** $y=-5x-2$ và $y=-5x+22$.

Câu 40. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$

A. $y=-9x-43$. **B.** $y=-9x+43$. **C.** $y=-9x-27$. **D.** $y=-9x-11$.

Câu 41. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=-x^3+3x^2+1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=3x+2$.

A. $y=3x$. **B.** $y=3x-6$. **C.** $y=-3x+3$. **D.** $y=3x+6$.

Câu 42. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{x+2}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x-y+2=0$.

A. $y=3x+14$ và $y=3x+2$. **B.** $y=3x+14$.
C. $y=3x+5$ và $y=3x-8$. **D.** $y=3x-8$.

Câu 43. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=x$.

A. $y=x-1$. **B.** $y=-x-\frac{23}{27}$.

C. $y=-x-1$. **D.** $y=-x-1, y=-x-\frac{23}{27}$.

Câu 44. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y=x^3-3x+2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+9y-9=0$.

A. $y=\frac{1}{9}x+18$ và $y=\frac{1}{9}x-14$. **B.** $y=-9x+18$ và $y=-9x+5$.

C. $y=9x+18$ và $y=9x+5$. **D.** $y=9x+18$ và $y=9x-14$.

Câu 45. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-4x^3+3x+1$ đi qua $A(-1;2)$ có phương trình là

A. $y=-9x+7$ hoặc $y=-x+2$. **B.** $y=-9x-11$ hoặc $y=-x+2$.

C. $y=-9x+11$ hoặc $y=2$. **D.** $y=-9x-7$ hoặc $y=2$.

Câu 46. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai là B. Điểm B có tọa độ là

A. $B(-1;0)$. **B.** $B(1;10)$. **C.** $B(2;33)$. **D.** $B(-2;1)$.

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C). Diện tích tam giác AOB bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 24.

Câu 48. Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2;5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $\frac{121}{6}$. **B.** $\frac{119}{6}$. **C.** $\frac{123}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Câu 49. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt các trục tọa độ tại A và B. Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 50. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{mx-1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1;-2)$.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-1$.

Câu 51. Cho hàm số $y=\frac{x+b}{ax-2}$ có hàm số (C). Biết a,b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0$. Tính $a+b$.

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+(2m-1)x+2m-3$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với $d: x-2y-4=0$.

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=4$.

Câu 53. Hỏi m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m$ vuông góc với đường thẳng $d: x-y+2=0$.

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $-4;3$. **C.** $3;5$. **D.** $5;+\infty$.

Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+2mx^2-m^2x+1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ song song với đường thẳng $d:15x+3y-2=0$.

A. $m=9$. **B.** $m=1,\ m=9$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-1,\ m=9$.

Câu 55. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m;1)$ kẻ đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\frac{2-x}{x-1}$.

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 56. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(-1;m)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

A. -1. **B.** 4. **C.** -3. **D.** -2.

Câu 57. Cho hàm số $y=\frac{x-m}{x-1}$ có đồ thị (C_m) và điểm $A(-1;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 58. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m;0)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. $\frac{1}{27}$. **B.** $\frac{15}{18}$. **C.** $\frac{\sqrt{217}}{9}$. **D.** $\frac{\sqrt{217}}{18}$

Câu 59. Tìm tổng các giá trị của tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x-m^2$ đi qua điểm $A(-1;4)$.

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 60. Tìm m để đường thẳng $d:y=m-x$ cắt đồ thị hàm số $(C):y=\frac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song nhau.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Câu 61. Tìm m để đường thẳng $d:y=m(x-2)-2$ cắt đồ thị hàm số $(C):y=x^3-3x^2+2$ tại ba điểm $A(2;-2),\mathrm{B},\mathrm{D}$ để tích các hệ số góc tiếp tuyến tại B,D của (C) là 27.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

D. LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=x^3+x$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=-1$.

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'\left(-1\right)=-2$.

Chọn A

Câu 2. Tiếp tuyến của đò thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-5}$ tại điểm $A\left(-1;0\right)$ có hệ số góc bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{6}{25}$. **D.** $-\frac{6}{25}$.

Lời giải

Tập xác định $D=R\backslash\left\{5\right\}$.

Ta có $y'=\frac{-6}{\left(x-5\right)^2}$.

Vì $A\left(-1;0\right)$ là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là

$k=y'\left(-1\right)=-\frac{1}{6}$

Chọn B

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại điểm $M\left(-1;-2\right)$ là

A. $y=9x+11$. **B.** $y=9x-11$. **C.** $y=9x-7$. **D.** $y=9x+7$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=3x^2-6x$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'\left(-1\right)=9$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=9\left(x+1\right)-2\Leftrightarrow y=9x+7$

Chọn D

Câu 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+4$ tại điểm $A\left(1;2\right)$ là

A. $y=3x+5$. **B.** $y=2x+4$. **C.** $y=-2x+4$. **D.** $y=-2x$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=4x^3-6x$.

Vì A là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là $k=y'\left(1\right)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến với đồthị hàm số tại A là

$y=-2\left(x-1\right)+2\Leftrightarrow y=-2x+4$.

Chọn C

Câu 5. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm $M\left(0;-1\right)$ là

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x-1$. **C.** $y=-3x-1$. **D.** $y=-3x+1$.

Lời giải

Tập xác định $D=R\setminus\{-1\}$

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(0)=3$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $y=3(x-0)-1\Leftrightarrow y=3x-1$.

Chọn B

Câu 6. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$ tại điểm $A\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $y=\dfrac{1}{2}x$. **B.** $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$. **C.** $y-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D=R\setminus\{-1\}$.

Ta có $y'=5-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

Vì A là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồthị hàm số tại A là $k=y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại A là

$y=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow y=3x+1$.

Chọn D

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ tại điểm $M(0;1)$ là

A. $y=\dfrac{1}{2}x+1$. **B.** $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. **C.** $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Vì M là tiếp điểm nên hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=\dfrac{1}{2}(x-0)+1\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$.

Chọn A

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-2$ tại điểm có hoành độ bằng $x_0=-3$

A. $y=30x+25$. **B.** $y=9x-25$. **C.** $y=30x-25$. **D.** $y=9x+25$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=3x^2+6x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=-3; y_0=-2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồthị hàm số tại M là

$y=9(x+3)-2\Leftrightarrow y=9x+25$.

Chọn D

Câu 9. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=-8x-6.$. **B.** $y=8x-6.$. **C.** $y=-8x+10.$. **D.** $y=8x+10.$

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=4x^3+4x.$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=1; y_0=2.$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(1)=8$.

Phương trình tiếp tuyến với đồthị hàm số tại M là

$y=8(x-1)+2 \Leftrightarrow y=8x-6.$

Chọn B

Câu 10. Tiếp tuyến của đồthị hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là

A. $y=-x-3$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=-x-1.$

Lời giải

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$

Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=-1; y_0=-2.$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(-1)=-1$.

Phương trình tiếp tuyến với đồthị hàm số tại M là

$y=-1(x+1)-2 \Leftrightarrow y=-x-3.$

Chọn A

Câu 11. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''\left(x_0\right)=0$ là

A. $y=-3x+3$. **B.** $y=9x+7$. **C.** $y=9x-7$. **D.** $y=-3x-3.$

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=3x^2-6x; y''=6x-6.$

Theo đề $y''\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow 6x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=1.$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=1; y_0=0.$

Hệ số góc cuả tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(1)=-3.$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=-3(x-1)+0 \Leftrightarrow y=-3x+3.$

Chọn A

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ tại điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ x_0 thỏa mãn $2y''\left(x_0\right)+y'\left(x_0\right)+15=0$ là

A. $y=9x+7$. **B.** $y=9x+6$. **C.** $y=9x$. **D.** $y=9x+1.$

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=3x^2-6x; y''=6x-6.$

Theo đề

$2y''(x_0)+y'(x_0)+15=0 \Leftrightarrow 2(6x_0-6)+3x_0^2-6x_0+15=0 \Leftrightarrow 3x_0^2+6x_0+3=0 \Leftrightarrow x_0=-1$

$\Leftrightarrow 6x_0-6=0 \Leftrightarrow x_0=1.$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow x_0=-1; y_0=-3.$

Hệ số góc cuả tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(-1)=9.$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=9(x+1)-3 \Leftrightarrow y=9x+6.$

Chọn B

Câu 13. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+x+1$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. $y=2x$. **B.** $y=9x-11$. **C.** $y=54x+32$. **D.** $y=-3x-3.$

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=3x^2-2x+1$.

$M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_0=2.$ và x_0 là nghiệm của phương trình

$x_0^3-x_0^2+x_0+1=2\Leftrightarrow x_0^3-x_0^2+x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1$.

Hệ số góc cuả tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(1)=2.$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=2(x-1)+2\Leftrightarrow y=2x.$

Chọn A

Câu 14. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+1$ tại điểm có tung độ bằng 5 là

A. $y=20x-35$. **B.** $y=-20x-35$ và $y=20x+35$.

C. $y=20x-35$ và $y=-20x-35$. **D.** $y=-20x+35.$

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

Ta có $y'=4x^3-6x.$

$M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_0=5.$ và x_0 là nghiệm của phương trình

$$x^4-3x^2+1=5\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0^2=-1(vn)\\x_0^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow x_0^2=4$$

$\Leftrightarrow x_0=\pm2$

- Với $M_1(2;5)\Rightarrow$ hệ số góc cuả tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là $k_1=y'(2)=2.$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_1 là

$y=20(x-2)+5\Leftrightarrow y=20x-35.$

- Với $M_2(-2;5)\Rightarrow$ hệ số góc cuả tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là $k_2=y'(-2)=-20.$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_2 là

$y=-20(x+2)+5\Leftrightarrow y=-20x-35.$

Chọn C

Câu 15. Phương trình tiếp tuyến của đồthị hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-4}$ tại điểm có tung độ bằng 3 là

A. $x+4y-20=0$. **B.** $x+4y-5=0$. **C.** $4x+y-2=0$. **D.** $4x+y-5=0$.

Lời giải

Tập xác định $D=R\backslash\{4\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-4}{(x-4)^2}$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y_0=3$ và x_0 là nghiệm của phương trình

$$\frac{2x_0-4}{x_0-4}=3\Leftrightarrow 2x_0-4=3\left(x_0-4\right)\Leftrightarrow x_0=8.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $k=y'(8)=-\dfrac{1}{4}$. .

Phương trình tiếp tuyến với đồthị hàm số tại M là $y=-\dfrac{1}{4}(x-8)+3\Leftrightarrow x+4y-20=0.$

Chọn A

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y=\frac{3}{2}x^4+x^2-1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+8y+16=0$.

A. $y=-8x+\frac{13}{2}$. **B.** $y=8x+\frac{13}{2}$. **C.** $y=-8x-\frac{13}{2}$. **D.** $y=8x-\frac{13}{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^3+2x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp tuyến $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k=y'(x_0)$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=-\frac{1}{8}x-2$ nên

$y'(x_0).\left(-\frac{1}{8}\right)=-1 \Leftrightarrow y'(x_0)=8 \Leftrightarrow 6x_0^3+2x_0=8 \Leftrightarrow 6x_0^3+2x_0-8=0 \Leftrightarrow x_0=1$,

Với $x_0=1 \Rightarrow M\left(1;\frac{3}{2}\right)$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là

$y=8(x-1)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=8x-\frac{13}{2}$.

Chọn D

Câu 17. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=2x^3-6x^2+3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $6x+y-5=0$. **B.** $6x+y+5=0$. **C.** $6x-y+3=0$. **D.** $6x+y-7=0$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^2-12x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$k=y'(x_0)=6x_0^2-12x_0=6\left[(x_0-1)^2-1\right]\geq -6$.

Dấu "=" xảy ra khi $x_0=1$.

Do đó, tại $M(1;-1)$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là $k=-6$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $y=-6(x-1)-1 \Leftrightarrow 6x+y-5=0$.

Chọn A

Câu 18. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y=-x^3+3x^2-5x+1$ có hệ số góc lớn nhất là

A. $2x-y=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $2x+y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-3x^2+6x-5$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại M là

$k=y'(x_0)=-3x_0^2+6x_0-5=-3(x_0-1)^2-2\leq -2$.

Dấu "=" xảy ra khi $x_0=1$.

Do đó, tại $M(1;-2)$ thì tiếp tuyến với đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là $k=-2$.

Vậy, phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M là $y=-2(x-1)-2 \Leftrightarrow 2x+y=0$.

Chọn C

Câu 19. Cho hàm số $y=x^3+x^2-1$ có đồ thị (C), phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;1)$ cắt (C) tại điểm B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $4\sqrt{26}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{105}$. **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

$y'=3x^2+2x; y'(1)=5.$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;1)$ là $d: y=5(x-1)+1=5x-4$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3+x^2-1=5x-4 \Leftrightarrow x^3+x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Tọa độ $B(-3;-19)$. Độ dài $AB=4\sqrt{26}.$

Chọn A

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{2x^2-4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ tiếp điểm bằng tung độ tiếp điểm.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=-2x-2$. **C.** $y=2x-2$. **D.** $y=-2x+2$.

Lời giải

Gọi $A\left(x_0;\sqrt{2x_0^2-4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số. Ta có $\sqrt{2x_0^2-4}=x_0 \Leftrightarrow x_0=2.$

$$y'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-4}};\ y'(2)=2.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $A(2;2)$ là $d: y=2(x-2)+2=2x-2.$

Chọn C

Câu 21. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ đi qua điểm $A(-1;4)$ có phương trình là

A. $y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$. **B.** $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$. **C.** $y=\frac{1}{3}x+4$. **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{13}{3}$.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)$ thuộc đồ thị hàm số. Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}; y'(x_0)=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}\cdot(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(-1;4)$ nên ta có phương trình: $\dfrac{3(-1-x_0)}{(x_0+1)^2}+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}=4 \Leftrightarrow x_0=-4.$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-4;3)$ là $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

Chọn A

Câu 22. Cho hàm số $y=x^3+mx^2+x+1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thịa àm số tại M có hoành độ $x=1$. Tìm tham số m để thỏa mãn $k\cdot f(-1)<0$.

A. $m>2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $-2<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

$y'=3x^2+2mx+1; k=y'(1)=2m+4.$

Điều kiện Câu toán $k\cdot f(-1)<0 \Leftrightarrow (2m+4)\cdot(m-1)<0 \Leftrightarrow -2<m<1.$

Chọn C

Câu 23. Gọi d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x-1$ tại hai điểm lần lượt có hoành độ là x_1 và x_2. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2+mx-3=0$. Tìm tham số m để d_1 song song d_2.

A. $m=-1$. **B.** $10m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

$y'=x^2+x-6$.

Hệ số góc của d_1, d_2 lần lượt là $y'(x_1)=x_1^2+x_1-6$ và $y'(x_2)=x_2^2+x_2-6$.

Ta có $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow y'(x_1)=y'(x_2) \Leftrightarrow (x_1-x_2)\cdot(x_1+x_2+1)=0 \Leftrightarrow x_1+x_2+1=0 (x_1 \neq x_2)$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm phương trình $x^2+mx-3=0$ nên $x_1+x_2=-m$. Suy ra $m=1$.

Chọn C

Câu 24. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+3mx+1$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1;3)$.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Gọi $M(1;3m)$ thuộc đồ thị hàm số. $y'=3x^2-4x+3m; y'(1)=3m-1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M: y=(3m-1)x+1$. Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$ nên suy ra $m=1$.

Chọn D

Câu 25. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-mx^2+3m+1$ tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua điểm $A(0;2)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Gọi $M(-1;2m+2)$ thuộc đồ thị hàm số. $y'=4x^3-2mx; y'(-1)=2m-4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M: y=(2m-4)x+4m-2$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;2)$ nên suy ra $m=1$.

Chọn A

Câu 26. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-(2m+1)x^2+m+2$ có hoành độ bằng 1. Hỏi giá trị của tham số m thuộc khoảng nào thì tiếp tuyến tại điểm M sẽ vuông góc với đường thẳng d có phương trình $y=x-4y-2018=0$.

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $[-3;0)$. **C.** $[0;5)$. **D.** $[5;+\infty)$.

Lời giải

Gọi $M(1;1-m)$ thuộc đồ thị hàm số. $y'=4x^3-2(m+1)x; y'(1)=2-2m$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k_d=\frac{1}{4}$.

Vì tiếp tuyến tại điểm M vuông góc với đường thẳng d nên $y'(1)=2-2m=-4 \Leftrightarrow m=3$.

Chọn C

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{x-m}{x-1}$ có đồ thị (C_m) và điểm $A(-1;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có đúng một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A. Tổng tất cả các phần tử của S bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện $m \neq 1$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-m}{x_0-1}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

$y'=\dfrac{m-1}{(x-1)^2};y'(x_0)=\dfrac{m-1}{(x_0-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y=\dfrac{m-1}{(x_0-1)^2}\cdot(x-x_0)+\dfrac{x_0-m}{x_0-1}$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(-1;2)$ nên ta có phương trình:

$\dfrac{m-1}{(x_0-1)^2}\cdot(-1-x_0)+\dfrac{x_0-m}{x_0-1}=2$.

Biến đổi phương trình ta được: $x_0^2+(2m-4)x_0+1=0 (x_0\neq 1)$.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$(2m-4)^2-4=0 \Leftrightarrow 4m^2-16m+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3. \end{array}\right.$

Do điều kiện $m\neq 1$ nên chỉ có $m=3$ thỏa mãn điều kiện Câu toán.

Tổng tất cả các giá trị thực của m bằng 3.

Chọn C

Câu 28. Tiếp tuyến tại điểm là nghiệm $y'=0$ của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-5$ thì

A. Song song với đường thẳng. **B.** Song song với trục hoành.
C. Có hệ số góc dương. **D.** Có hệ số góc bằng -1.

Lời giải

Gọi x_0 là nghiệm phương trình $y'=0: y'(x_0)=0$. Khi đó tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 sẽ có hệ số góc $k=y'(x_0)=0$ nên tiếp tuyến song song với trục hoành.

Chọn B

Câu 29. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=x^4-8x^2+2$ tại điểm có hoành độ $x_0=\sqrt{2}$ bằng

A. $-6\sqrt{2}$. **B.** $-7\sqrt{2}$. **C.** $-8\sqrt{2}$. **D.** $-9\sqrt{2}$.

Lời giải

$y'=4x^3-16x$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=\sqrt{2}$ là $y'\left(\sqrt{2}\right)=-8\sqrt{2}$.

Chọn C

Câu 30. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=x^3-2x+1$ tại điểm $M(-1;2)$ bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 25. **D.** 1.

Lời giải

$y'=3x^2-2$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2)$ bằng $y'(-1)=1$.

Chọn D

Câu 31. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-4x+6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ có hệ số góc bằng

A. -4. **B.** $\dfrac{47}{12}$. **C.** $-\dfrac{13}{4}$. **D.** $-\dfrac{17}{4}$.

Lời giải

$f'(x)=x^2-x-4; f''(x)=2x-1$.

$f''(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{2}$ bằng $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}.$

Chọn D

Câu 32. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2,$ tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 0.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3 \geq -3; \forall x \in \mathbb{R}.$

Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng -3 tại điểm có hoành độ bằng $1.$

Chọn A

Câu 33. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $A(1;0)$ là

A. $y = -3x + 3$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = 3x + 1$. **D.** $y = 3x + 3$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 6x; y'(1) = -3.$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $A(1;0)$ là

$y = -3(x-1) = -3x + 3.$

Chọn A

Câu 34. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là

A. $y = -3x + 9$. **B.** $y = -x + 5$. **C.** $y = 3x - 5$. **D.** $y = x + 1$.

Lời giải

$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}; y'(2) = -1.$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là $y = -(x-2) + 3 = -x + 5.$

Chọn B

Câu 35. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là

A. $y = -3x - 5$. **B.** $y = 3x + 13$. **C.** $y = 3x + 5$. **D.** $y = -3x + 13$.

Lời giải

$y' = \frac{3}{(x+2)^2}; y'(-3) = 3$ và $y(-3) = 4.$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ bằng -3 là $y = 3(x+3) + 4 = 3x + 13.$

Chọn B

Câu 36. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 là

A. $y = -12x - 7$. **B.** $y = 12x - 7$. **C.** $y = -12x + 17$. **D.** $y = 12x + 17$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số. Theo đề Câu $y_0 = 2x_0^3 + 3x_0^2 = 5 \Leftrightarrow x\ 0 = 1.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1) \cdot (x-1) + y_0 = 12(x-1) + 5 = 12x - 7.$

Chọn B

Câu 37. Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 9$ tại điểm có hoành độ bằng 9 là

A. $y=1$ và $y=9x-1$. **B.** $y=19$ và $y=9x-8$.

C. $y=9$ và $y=9x-18$. **D.** $y=0$ và $y=9x-1$.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số. Theo đề Câu $y_0=x_0^3-3x_0^2+9=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=3. \end{array}\right.$

$x_0=0$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=y'(0)\cdot(x-0)+y_0=0(x-0)+9=9$.

$x_0=3$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=y'(3)\cdot(x-3)+y_0=9(x-3)+9=9x-18$.

Chọn C

Câu 38. Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ với trục hoành là

A. $y=2x$. **B.** $y=-2x+4$. **C.** $y=-2x-4$. **D.** $y=2x-4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $\dfrac{2x-4}{x-3}=0 \Leftrightarrow x=2$

$y'=-\dfrac{2}{(x-3)^2}; y'(2)=-2.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-2(x-2)=-2x+4$.

Chọn B

Câu 39. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 5.

A. $y=-5x+2$ và $y=-5x+22$. **B.** $y=-5x+2$ và $y-5x-22$.

C. $y=5x+2$ và $y=-5x+22$. **D.** $y=-5x-2$ và $y=-5x+22$.

Lời giải

$y'=-\dfrac{5}{(x-2)^2}$. Giải $y'=-5 \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1. \end{array}\right.$

$x=3$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-5(x-3)+7=-5x+22$.

$x=1$: Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-5(x-1)-3=-5x+2$.

Chọn A

Câu 40. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$

A. $y=-9x-43$. **B.** $y=-9x+43$. **C.** $y=-9x-27$. **D.** $y=-9x-11$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=x^2+6x$. Mà theo giả thiết, tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$ nên

$y'(x_0)=-9 \Rightarrow x_0^2+6x_0=-9 \Leftrightarrow (x_0+3)^2=0 \Leftrightarrow x_0=-3.$

Do đó $y_0=\dfrac{(-3)^3}{3}+3\cdot(-3)^2-2=16 \Rightarrow M(-3;16)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=-9\cdot(x-x_0)+y_0=-9(x+3)+16=-9x-11$.

Chọn D

Câu 41. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=-x^3+3x^2+1$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=3x+2$.

A. $y=3x$. **B.** $y=3x-6$. **C.** $y=-3x+3$. **D.** $y=3x+6$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=-3x^2+6x$. Mà tiếp tuyến song song với $d:y=3x+2$ nên có hệ số góc $k=3$.

Do đó $y'(x_0)=3\Rightarrow -3x_0^2+6x_0=3\Leftrightarrow -3(x_0-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Do đó $y_0=3\Rightarrow M(1;3)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y=3\cdot(x-x_0)+y_0=3(x-1)+3=3x$.

Chọn A

Câu 42. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C):y=\dfrac{2x+1}{x+2}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:3x-y+2=0$.

A. $y=3x+14$ và $y=3x+2$. **B.** $y=3x+14$.

C. $y=3x+5$ và $y=3x-8$. **D.** $y=3x-8$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. Mà tiếp tuyến song song với $\Delta:3x-y+2=0$ nên có hệ số góc $k=3$.

Do đó

$$y'(x_0)=3\Rightarrow\frac{3}{(x_0+2)^2}=3\Leftrightarrow(x_0+2)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0+2=1\\x_0+2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=-3\end{array}\right..$$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-1\Rightarrow M(-1;-1)$.

Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=3(x+1)-1=3x+2$. (loại vì trùng với Δ)

Với $x_0=-3\Rightarrow y_0=5\Rightarrow M(-3;5)$.

Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=3(x+3)+5=3x+14$. (nhận)

Chọn B

Câu 43. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-1$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:y=x$.

A. $y=x-1$. **B.** $y=-x-\dfrac{23}{27}$.

C. $y=-x-1$. **D.** $y=-x-1, y=-x-\dfrac{23}{27}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=3x^2-4x$. Mà tiếp tuyến vuông góc với $d:y=x$ nên có hệ số góc $k=-1$. Do đó

$$y'(x_0)=-1\Rightarrow 3x_0^2-4x_0=-1\Leftrightarrow 3x_0^2-4x_0+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow M(1;-2)$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=-1\cdot(x-1)-2=-x-1$

Với $x_0=\dfrac{1}{3}\Rightarrow y_0=-\dfrac{32}{27}\Rightarrow M(\dfrac{1}{3};-\dfrac{32}{27})$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=-1\cdot(x-\dfrac{1}{3})-\dfrac{32}{27}=-x-\dfrac{23}{27}$.

Chọn D

Câu 44. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y=x^3-3x+2,$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+9y-9=0.$

A. $y=\dfrac{1}{9}x+18$ và $y=\dfrac{1}{9}x-14$.
B. $y=-9x+18$ và $y=-9x+5$.
C. $y=9x+18$ và $y=9x+5$.
D. $y=9x+18$ và $y=9x-14$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Ta có $y'=3x^2-3.$ Mà tiếp tuyến vuông góc với $x+9y-9=0$ nên có hệ số góc $k=9.$ Do đó $y'x_0)=9\Rightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm2.$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=4\Rightarrow M(2;4).$ Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=9\cdot(x-2)+4=9x-14.$

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=0\Rightarrow M(-2;0).$ Do đó phương trình tiếp tuyến là $y=9\cdot(x+2)=9x+18.$

Chọn D

Câu 45. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-4x^3+3x+1$ đi qua $A(-1;2)$ có phương trình là

A. $y=-9x+7$ hoặc $y=-x+2$.
B. $y=-9x-11$ hoặc $y=-x+2$.
C. $y=-9x+11$ hoặc $y=2$.
D. $y=-9x-7$ hoặc $y=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Gọi d là tiếp tuyến cần tìm. Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm. Khi đó ta có

$$\begin{cases} y_0=-4x_0^3+3x_0+1 \\ y'(x_0)=-12x_0^2+3. \end{cases}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến d là

$y=y'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0=(-12x_0^2+3)\cdot(x-x_0)-4x_0^3+3x_0+1.$

Mà $A(-1;2)\in d$ nên ta có $2=(-12x_0^2+3)\cdot(-1-x_0)-4x_0^3+3x_0+1\Leftrightarrow 8x_0^3-12x_0^2-4=0$

$$\Leftrightarrow 4(2x_0-1)(x_0+1)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0-1=0 \\ (x_0+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=\dfrac{1}{2} \\ x_0=-1 \end{array}\right.$$

Với $x_0=\dfrac{1}{2}$ ta có $d: y=2.$

Với $x_0=-1$ ta có $d: y=-9x-7.$

Chọn D

Câu 46. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+4x^2+4x+1$ tại điểm $A(-3;-2)$ cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai là $B.$ Điểm B có tọa độ là

A. $B(-1;0)$. **B.** $B(1;10)$. **C.** $B(2;33)$. **D.** $B(-2;1)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+8x+4.$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $A(-3;-2)$ là

$d: y=y'(-3)\cdot(x+3)-2=7x+19.$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3+4x^2+4x+1=7x+19 \Leftrightarrow x^3+4x^2-3x-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Do đó điểm B có tọa độ $(2;33)$.

Chọn C

Câu 47. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ hai của Δ với (C). Diện tích tam giác AOB bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 24.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2+6x.$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $a(1;5)$ là

$d: y=y'(1)\cdot(x-1)+5=9x-4.$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3+3x^2+1=9x-14 \Leftrightarrow x^3=3x^2-9x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1. \end{array}\right.$$

Do đó, điểm B có tọa độ $(-5;-49)$. Suy ra $AB=6\sqrt{82}.$

Mà $d(O;AB)=d(O;d)=\dfrac{4}{\sqrt{82}}$ nên diện tích tam giác AOB bằng

$$\frac{1}{2}AB\cdot d(O;AB)=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{82}\cdot\frac{4}{\sqrt{82}}=12.$$

Chọn A

Câu 48. Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2;5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $\dfrac{121}{6}$. **B.** $\dfrac{119}{6}$. **C.** $\dfrac{123}{6}$. **D.** $\dfrac{125}{6}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(2;5)$ là

$d: y=y'(2)\cdot(x-2)+5=-3x+11.$

Do A là giao điểm của d với Ox nên có tọa độ $\left(\dfrac{11}{3};0\right)\Rightarrow OA=\dfrac{11}{3}.$

Do B là giao điểm của d với Oy nên có tọa độ $(0;11)\Rightarrow OB=11.$

Ta có tam giác AOB vuông tại O nên có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{3}\cdot 11=\dfrac{121}{6}.$

Chọn A

Câu 49. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt các trục tọa độ tại A và B. Diện tích tam giác AOB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Gọi $M(0;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0=\dfrac{2\cdot 0+1}{0+1}=1\Rightarrow M(0;1)$ và $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(0;1)$ là

$d: y=y'(0)\cdot x+1=x+1$

Do A là giao điểm của d và Ox nên có tọa độ $(-1;0)$ $\Rightarrow$ $OA=1$.

Do B là giao điểm của d và Oy nên có tọa độ $(0;1)$ $\Rightarrow$ $OB=1$.

Ta có tam giác AOB vuông tại O nên có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}.1.1=\dfrac{1}{2}$.

Chọn A

Câu 50. Tìm tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(1;-2)$.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\ 2$. Gọi $M(1;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0=\dfrac{m-1}{1-2}=1-m$ $\Rightarrow$ $M(1;1-m)$ và $y'=\dfrac{1-2m}{(x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $M(1;1-m)$ là:

$d: y=y'_{(1)}(x-1)+1-\mathrm{m}=(1-2\mathrm{m}).\mathrm{x}+\mathrm{m}$

Mà d đi qua $A(1;-2)$ nên ta có: $-2=(1-2m).1+m$ $\Leftrightarrow$ $m=3$.

Chọn B

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{x+b}{ax-2}$ có hàm số (C). Biết a,b là các giá trị thực sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0$. Tính $a+b$.

A. $a+b=0$. **B.** $a+b=-1$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{a}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2-ab}{(ax-2)^2}$. Do $M(1;-2)\in(C)$ và tiếp tuyến tại M song song với d có hệ số góc

$k=-3$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}-2=\dfrac{1+b}{a-2}\\ y'_{(1)}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-2a\\ \dfrac{-2-ab}{(a-2)^2}=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=3-2a\\ 3a^2-12a+10+ab=0\end{cases}$

Giải hệ trên ta được $(a;b)=\ (1;1),(2;-1)$.

Ta loại đi đáp án $(a;b)=(2;-1)$ vì khi đó tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\ 1$ nên $M(1;-2)\notin(C)$.

Vậy $(a;b)=(1;1)\Rightarrow a+b=2$.

Chọn C

Câu 52. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+(2m-1)x+2m-3$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với $d:x-2y-4=0$.

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-3x^2+6x+2m-1$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị tại $M(x_0;y_0)$. Khi đó

$k=y'_{(x_0)}=-3x_0^2+6x_0+2m-1$.

Ta có $k=-3(x_0^2-2x_0+1)+2m+2=-3(x_0-1)^2+2m+2\le 2m+2$. Do đó $k_{\max}=2m+2$ khi $x_0=1$.

Mặt khác ta có Δ vuông góc với $d:y=\dfrac{1}{2}x-2$ nên có hệ số góc bằng -2, suy ra

$2m+2=-2\Leftrightarrow m=-2$.

Chọn A

Câu 53. Hỏi m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m$ vuông góc với đường thẳng $d:x-y+2=0$.

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $-4;3$. **C.** $3;5$. **D.** $5;+\infty$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-6x+m-2$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị tại $M(x_0;y_0)$. Khi đó

$k=y'_{(x_0)}=3x_0^2-6x_0+m-2$.

Ta có $k=3(x_0^2-2x_0+1)+m-5=3(x_0-1)^2+m-5\ge m-5$. Do đó $k_{\min}=m-5$ khi $x_0=1$.

Mặt khác ta có Δ vuông góc với nên ta có hệ số góc bằng -1, suy ra $m-5=-1\Leftrightarrow m=4$.

Chọn C

Câu 54. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+2mx^2-m^2x+1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ song song với đường thẳng $d:15x+3y-2=0$.

A. $m=9$. **B.** $m=1,\ m=9$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-1,\ m=9$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2+4mx-m^2$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ nên

$k=y'(2)=4+8m-m^2$.

Mặt khác tiếp tuyến lại song song với $d:y=-5x+\dfrac{2}{3}$ nên $k=-5\Leftrightarrow 4+8m-m^2=-5\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=9 \end{array}\right.$.

Với $m=-1$ thì tiếp tuyến lúc đó có phương trình $y=-5(x-2)-\dfrac{19}{3}=-5x+\dfrac{11}{3}$.

Với $m=9$ thì tiếp tuyến lúc đó có phương trình $y=-5(x-2)-\dfrac{259}{3}=-5x-\dfrac{229}{3}$.

Chọn D

Câu 55. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m;1)$ kẻ đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{x-1}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số qua $M(m;1)$ có dạng $y=k(x-m)+1$.

Để từ A kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ $\begin{cases}\dfrac{2-x}{x-1}=k(x-m)+1 & (1)\\ -\dfrac{1}{(x-1)^2}=k & (2)\end{cases}$

Có duy nhất một nghiệm. Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{2-x}{x-1}=\frac{m-x}{(x-1)^2}+1 \Leftrightarrow 2x^2-6x+3+m=0 \quad (*)$$

Để hệ trên có một nghiệm duy nhất thì phương trình (*) phải có nghiệm kép khác 1 hoặc có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1. Do đó ta có

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'=3-2m=0\\ \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{3}{2}\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\ 2-6+3+m=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\ m=1\end{array}\right..$$

Chọn C

Câu 56. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(-1;m)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

A. -1. **B.** 4. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số qua $A(-1;m)$ có dạng $y=k(x+1)+m$.

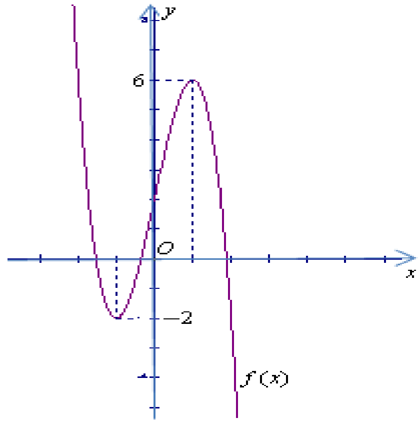
Để từ A kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ $\begin{cases}x^3-3x^2+2=k(x+1)+m & (1)\\ 3x^2-6x=k & (2)\end{cases}$

Có đúng hai nghiệm. thay (2) vào (1) ta được

$$x^3-3x^2+2=(3x^2-6x)(x+1)+m \Leftrightarrow -2x^3+6x+2=m. \ (*)$$

Để hệ trên có đúng hai nghiệm thì phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với đồ thị hàm số $y=f(x)=-2x^3+6x+2$ và đường thẳng $y=m$ có đúng hai giao điểm.

Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy để đồ thị hàm số và đường thẳng $y=m$ có đúng hai giao điểm thì $m=-2$ hoặc $m=6$.



Vậy tổng các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu câu toán là $-2+6=4$.

Chọn B

Câu 57. Cho hàm số $y=\dfrac{x-m}{x-1}$ có đồ thị (C_m) và điểm $A(-1;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để có một tiếp tuyến của (C_m) đi qua A tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Gọi $B(b;\dfrac{b-m}{b-1})\in(C_m)$ là tiếp điểm $(b\neq 1)$.

Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại B là

$$d: y=y'(b).(x-b)+\frac{b-m}{b-1}=\frac{m-1}{(b-1)^2}.(x-b)+\frac{b-m}{b-1}.$$

Mà d đi qua $A(-1;2)$ nên ta có

$$2=\frac{m-1}{(b-1)^2}.(-1-b)+\frac{b-m}{b-1}\Leftrightarrow 2(b-1)^2=(m-1)(-1-b)+(b-m)(b-1)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2-4b+2=b(1-m)+1-m+b^2+b(-1-m)+m \Leftrightarrow 2b^2-4b+2=b^2-2mb+1$$

$$\Leftrightarrow b^2+b(2m-4)+1=0 \qquad (*)$$

Mặt khác d tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân nên $y'(b)=\pm 1$ hay $\dfrac{m-1}{(b-1)^2}=\pm 1$.

TH1: $\dfrac{m-1}{(b-1)^2}=1\Leftrightarrow\ m-1=b^2-2b+1\ \Leftrightarrow\ m=b^2-2b+2$. Thay vào (*) ta được

$$b^2+b(2b^2-4b)+1=0\ \Leftrightarrow\ 2b^3-3b^2+1=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b=-\dfrac{1}{2} & \text{(tm)} \\ b=1 & \text{(l)} \end{array}\right.$$

Với $b=-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ m=\dfrac{13}{4}$.

TH2: $\dfrac{m-1}{(b-1)^2}=-1\Leftrightarrow\ m-1=-b^2+2b-1\ \Leftrightarrow\ m=-b^2+2b$. Thay vào (*) ta được

$$b^2+b(-2b^2+4b-4)+1=0 \Leftrightarrow -2b^3+5b^2-4b+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b=\dfrac{1}{2} & \text{(tm)} \\ b=1 & \text{(l)} \end{array}\right.$$

Với $b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{3}{4};\dfrac{13}{4}\right\}$.

Chọn B

Câu 58. Tìm tổng các giá trị của tham số m để từ điểm $A(m;0)$ kẻ đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. $\dfrac{1}{27}$. **B.** $\dfrac{15}{18}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{217}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{217}}{18}$

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Đường thẳng đi qua A có dạng $d: y=k(x-m)$.

Để từ A kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến đồ thị thì hệ

$$\begin{cases} x^3+3x^2=k(x-m) & (1) \\ 3x^2+6x=k & (2) \end{cases}$$

Có đúng 2 nghiệm phân biệt. Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3+3x^2=(3x^2+6x)(x-m) \Leftrightarrow x(x^2+3x)-x(3x+6)(x-m)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2+3x-3x^2-6x+3mx+6m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ -2x^2+x(3m-3)+6m=0 & (*) \end{array}\right.$$

Ta thấy với $x=0$ thì tiếp tuyến qua A là $d: y=0$, khi đó không có tiếp tuyến nào của đồ thị vuông góc với d.

Vậy để từ A kẻ được đúng hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 0 và thỏa $(3x_1^2+6x_1)(3x_2^2+6x_2)=-1$, suy ra

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ m\neq 0 \\ (3x_1^2+6x_1)(3x_2^2+6x_2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-3)^2+48m>0 \\ m\neq 0 \\ 9x_1^2x_2^2+18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9m^2+30m+9>0 \\ m\neq 0 \\ 9P^2+18PS+36P=-1 \end{cases}$$

Với $S=x_1+x_2=\dfrac{3m-3}{2}$, $P=x_1x_2=-3m$ (hệ thức vi-et). Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} m\in(-\infty;-3)\cup(-\dfrac{1}{3};+\infty) \\ m\neq 0 \\ 81m^2-27m(3m-3)-108m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;-3)\cup(-\dfrac{1}{3};+\infty) \\ m=\dfrac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{27}.$$

Chọn A

Câu 59. Tìm tổng các giá trị của tham số m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x-m^2$ đi qua điểm $A(-1;4)$.

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-6x+(m-2)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại $M(x_0,y_0)$, khi đó

$k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0+m-2.$

Ta có $k=3(x_0^2-2x_0+1)+m-5=3(x_0-1)^2+m-5\geq m-5$. Do đó $k_{\min}=m-5$ khi $x_0=1$.

Khi đó tiếp tuyến có dạng $d:y=(m-5)(x-1)-m^2+m-4$. Mà d đi qua $A(-1;4)$ nên ta có

$$4=-2(m-5)-m^2+m-4 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị m thỏa yêu cầu câu toán là $-2+1=-1$.

Chọn B

Câu 60. Tìm m để đường thẳng $d:y=m-x$ cắt đồ thị hàm số $(C):y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho các tiếp tuyến của (C) tại A và B song song nhau.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $m-x=\dfrac{x-1}{x+1}\Leftrightarrow(m-x)(x+1)=x-1$

$\Leftrightarrow x^2+(2-m)x-1-m=0$ (*).

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến tại chúng song song với nhau thì phương trình (*) phải có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt thỏa mãn $y'(x_1)=y'(x_2)$. Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}\Delta=(2-m)^2+4(1+m)>0 \\ \dfrac{2}{(x_1+1)^2}=\dfrac{2}{(x_2+1)^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+8>0 \\ (x_1+1)^2=(x_2+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+1=x_2+1 \\ x_1+1=-x_2-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1=x_2 & (L) \\ x_1+x_2=-2 & \end{array}\right.$$

Áp dụng hệ thức vi – et cho phương trình (*) ta có $x_1+x_2=m-2$. Do đó $m-2=-2$

$\Leftrightarrow m=0$.

Chọn A

Câu 61. Tìm m để đường thẳng $d:y=m(x-2)-2$ cắt đồ thị hàm số $(C):y=x^3-3x^2+2$ tại ba điểm $A(2;-2),\mathrm{B},\mathrm{D}$ để tích các hệ số góc tiếp tuyến tại B,D của (C) là 27.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-6x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$x^3-3x^2+2=m(x-2)-2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+4-m(x-2)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2)-m(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-2-m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x-2-m=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Để d cắt (C) tại ba điểm $A,\ B,\ D$ và tích các hệ số góc tiếp tuyến tại $B,\ D$ là 27 thì phương trình (*) phải có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khác 2 thỏa $y'(x_1).y'(x_2)=27.$ Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} \Delta=1+4(2+m)>0 \\ 2^2-2-2-m\neq 0 \\ (3x_1^2-6x_1).(3x_2^2-6x_2)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+4m>0 \\ m\neq 0 \\ 9x_1^2x_2^2-18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ 9P^2-18SP+36P=27 \end{cases}$$

Với $S=x_1+x_2=1,\ P=x_1x_2=-2-m$. Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ 9(2+m)^2+18(2+m)-36(2+m)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ 9m^2+18m-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Chọn B

BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ VI PHÂN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm cấp hai. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm trên $(a;b)$. Khi đó, hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên $(a;b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, và ký hiệu là y'' hay $f''(\mathrm{x})$. Ta có $f''(\mathrm{x}) = [f'(x)]'$.

2. Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$

3. Tổng quát. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, ký hiệu là $f^{(n-1)}(x)$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$. Ta có $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

4. Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai. Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s(t)$ tại thời điểm t.

5. Vi phân. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $\mathrm{x} \in (a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x. Khi đó, ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx, kí hiệu là $df(x)$ hoặc là dy. Tức là $dy = df(x) = f'x).\Delta x$.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

☑_ DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA MỘT HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP.

- Tính đạo hàm cấp một y'.

- Lần lượt tính các đạo hàm cấp 2, 3,., n của hàm số $y = f(x)$.

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

a) $y = x^5 - 2x^2 + 1,\ n = 3.$ b) $y = \sin 2x + \cos 2x,\ n = 5$.

Lời giải

a) $y = x^5 - 2x^2 + 1,\ n = 3.$

Ta có $y' = 5x^4 - 4x \Rightarrow y'' = (5x^4 - 4x)' = 20x^3 - 4 \Rightarrow y^{(3)} = (20x^3 - 4)' = 60x^2$.

b) $y = \sin 2x + \cos 2x,\ n = 5.$

Ta có $y' = 2\cos 2x - 2\sin 2x \Rightarrow y'' = (2\cos 2x - 2\sin 2x)' = -4\sin 2x - 4\cos 2x$

$\Rightarrow y'''(x) = (-4\sin 2x - 4\cos 2x)' = -8\cos 2x + 8\sin 2x.$

$\Rightarrow y^{(4)} = (-8\cos 2x + 8\sin 2x)' = 16\sin 2x + 16\cos 2x$

$\Rightarrow y^{(5)} = (16\sin 2x + 16\cos 2x)' = 32\cos 2x - 32\sin 2x.$

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. **ĐS.** $y'' = 12x - 6.$

Bài 2. Tính đạo hàm cấp bốn của hàm số $y = 5x^4 + 4x^3 - 7x + 2019$. **ĐS.** $y^{(4)} = 120.$

Bài 3. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \dfrac{1}{1-x}$. **ĐS.** $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Bài 4. Tính đạo hàm cấp năm của hàm số $y = \sin(2x+1) + x^3 + 5$. **ĐS.** $y^{(5)} = 32\cos(2x+1).$

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 2020$. Tính giá trị của $f^{(4)}(-1); f^{(4)}(0)$

ĐS. $f^{(4)}(-1) = -144; f^{(4)}(0) = 96$.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x + \frac{1}{2}x^2 - x$. Tính giá trị của $f''(\frac{\pi}{6}); f^{(3)}(\pi)$

ĐS. $f''(\frac{\pi}{6}) = 1 - 2\sqrt{3}; f^{(3)}(\pi) = -8$.

Bài 7. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$. Trong đó, t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$.

ĐS. $a(3) = 12m/s^2$

Bài 8. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$. Trong đó, t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động khi gia tốc bị triệt tiêu.

ĐS. $v(1) = -12m/s^2$

Bài 9. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$ thỏa $2(y')^2 = (y-1).y''$.

Bài 10. Chứng minh rằng hàm số $y = x\sin x$ thỏa $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$.

Bài 11. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$ thỏa $(y')^2 + (y'')^2 = 2$.

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \tan^2 2x$ thỏa $y'' - 32y - 24y^2 = 8$.

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. Ta có $y' = (2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)' = 6x^2 - 6x + 4$. Suy ra $y'' = (6x^2 - 6x + 4)' = 12x - 6$.

Bài 2. Ta có $y' = 20x^3 + 12x^2 - 7 \Rightarrow y'' = 60x^2 + 24x \Rightarrow y^{(3)} = 120x + 24 \Rightarrow y^{(4)} = 120$.

Bài 3. Ta có $y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Bài 4. Ta có $y' = 2\cos(2x+1) + 3x^2 \Rightarrow y'' = -4\sin(2x+1) + 6x \Rightarrow y^{(3)} = -8\cos(2x+1) + 6$

$\Rightarrow y^{(4)} = 16\sin(2x+1) \Rightarrow y^{(5)} = 32\cos(2x+1)$.

Bài 5. Ta có $y' = 10x^4 + 16x^3 - 6x + 1 \Rightarrow y'' = 40x^3 + 48x^2 - 6 \Rightarrow y^{(3)} = 120x^2 + 96x$

$\Rightarrow y^{(4)} = 240x + 96$

Suy ra $f^{(4)}(-1) = 240.(-1) + 96 = -144; f^{(4)}(0) = 240.0 + 96 = 96$.

Bài 6. Ta có $y' = 2\cos 2x + x - 1 \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 1 \Rightarrow y^{(3)} = -8\cos 2x$.

Suy ra $f''(\frac{\pi}{6}) = -4\sin(\frac{\pi}{3}) + 1 = 1 - 2\sqrt{3}; f^{(3)}(\pi) = -8\cos(2\pi) = -8$.

Bài 7. Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Suy ra gia tốc của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = 6t - 6 = 0$

Vậy $a(3) = 6.3 - 6 = 12\ m/s^2$.

Bài 8. Ta có vận tốc của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Suy ra gia tốc của chuyển động tại thời điểm t là $a(t) = v'(t) = 6t - 6 = 0$

Gia tốc bị triệt tiêu khi $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra $v(1) = -12m/s$.

Bài 9. Ta có $y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y''(x) = \dfrac{-14}{(x+4)^3}$.

Suy ra $(y-1)y'' = -(\dfrac{x-3}{x+4} - 1).\dfrac{14}{(x+4)^3} = 2.\dfrac{49}{(x+4)^4} = 2(y')^2$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 10. Ta có $y' = (x\sin x)' = \sin x + x\cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x$.

Suy ra $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2\sin x - 2x\cos x + x(2\cos x - x\sin x) = 0$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 11. Ta có $y = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x\cos x} = \dfrac{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)}{1 - \sin x\cos x} = \sin x + \cos x$.

$y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x$

Suy ra

$(y')^2 + (y'')^2 = (\cos x - \sin x)^2 = (-\sin x - \cos x)^2 = (1 - 2\sin x\cos x) = (1 + 2\sin x\cos x) = 2$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 12. Ta có $y' = 2\tan 2x(\tan 2x)' = 4\tan 2x(1 + \tan^2 2x) = 4\tan 2x + 4\tan^3 2x$.

$\Rightarrow y'' = 8(1 + \tan^2 2x) + 24\tan^2 2x(1 + \tan^2 2x) = 24\tan^4 2x + 32\tan^2 2x + 8$

Suy ra $y'' - 32y - 24y^2 = 24\tan^4 2x + 32\tan^2 2x + 8 - 32\tan^2 2x - 24\tan^4 2x = 8$.

Ta có điều phải chứng minh.

☑_ DẠNG 2. TÌM VI PHÂN CỦA MỘT HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP.

- Tính $f'(x)$
- Áp dụng công thức $dy = f'(x)dx$

☑_VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm vi phân của các hàm số

a) $y = x^3 - 5x + 1$.

b) $y = \sin^3 x$.

Lời giải

a) $y = x^3 - 5x + 1$.

Ta có. $y' = 3x^2 - 5$. Suy ra $dy = (3x^2 - 5)dx$

b) $y = \sin^3 x$

Ta có. $y' = 3\sin^2 x(\sin x)' = 3\sin^2 x.\cos x$.

Suy ra $dy = 3\sin^2 x\cos x dx$

☑_BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm vi phân của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$. **ĐS.** $dy = (-6x^2 + 6x)dx$.

Bài 2. Tìm vi phân của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$. **ĐS.** $dy = \dfrac{5}{(x+3)^2}dx$.

Bài 3. Tìm vi phân của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x\cos x$. **ĐS.** $dy=(\sin 2x-\cos 2x)dx.$

Bài 4. Tìm vi phân của hàm số $y=\sqrt{2x+1}$. **ĐS.** $dy=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}dx.$

☑_LỜI GIẢI

Bài 1. Ta có $y'=-6x^2+6x$. Suy ra $dy=y'dx=(-6x^2+6x)dx.$.

Bài 2. Ta có $y'=\dfrac{5}{(x+3)^2}$. Suy ra $dy=y'dx=\dfrac{5}{(x+3)^2}dx$.

Bài 3. Ta có $y'=2\sin x\cos x-\cos 2x=\sin 2x-\cos 2x$. Suy ra $dy=y'dx=(\sin 2x-\cos 2x)dx.$.

Bài 4. Ta có $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Suy ra $dy=y'dx=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}dx.$

BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG V

Bài 1. Dùng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x^2+5} - 1$ tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS. $f'(2) = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giả sử Δx là số gia đối số tại $x_0 = 2$.

Ta có $\Delta y = \sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} - 1 - \sqrt{x_0^2+5} + 1 = \sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} - \sqrt{x_0^2+5}$.

Khi đó $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} - \sqrt{x_0^2+5}}{\Delta x}$

$= \dfrac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x(\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} + \sqrt{x_0^2+5})}$

$= \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta^2 x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} + \sqrt{x_0^2+5}}$

$= \dfrac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} + \sqrt{x_0^2+5}}$

Nên $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2x_0 + \Delta x}{\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+5} + \sqrt{x_0^2+5}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $f'(2) = \dfrac{2}{3}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2+x)(5-3x^2)$. **ĐS.** $y' = -12x^3 - 9x^2 + 10x + 5$.

Lời giải

Ta có $y = (x^2+x)(5-3x^2) = -3x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 5x$.

Suy ra $y' = -12x^3 - 9x^2 + 10x + 5$.

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+4}{3-x}$. **ĐS.** $y' = \dfrac{7}{(3-x)^2}$.

Lời giải

Ta có $y = \dfrac{x+4}{3-x} = \dfrac{x+4}{-x+3}$. Suy ra $y' = \dfrac{7}{(3-x)^2}$.

Bài 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 4x^3 + 3x - \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}$ **ĐS.** $y' = 12x^2 + 3 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

Ta có $y = 4x^3 + 3x - \dfrac{2}{x} + \sqrt{x}$

Suy ra $y' = 12x^2 + 3 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Bài 5. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{5x^3 - 3x^2 + 1}$. **ĐS.** $y' = \dfrac{15x^2 - 6x}{2\sqrt{5x^3 - 3x^2 + 1}}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{15x^2-6x}{2\sqrt{5x^3-3x^2+1}}$.

Bài 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}+3x^3+\dfrac{5}{4}x^2+5$ **ĐS.** $y'=x^3+9x^2+\dfrac{5}{2}x$

Lời giải

Với mọi giá trị thực của x. $y'=x^3+9x^2+\dfrac{5}{2}x$

Bài 7. Tính đạo hàm của hàm số $y=(2x^2-1)(3x+5)$ **ĐS.** $y'=18x^2+20x-3$

Lời giải

Với mọi giá trị thực của x. $y'=4x(3x+5)+3(2x^2-1)=18x^2+20x-3$

Bài 8. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2x^4+3x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}, y'=\dfrac{3x^2\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^3-1\right)}{x^2+1}=\dfrac{2x^4+3x^2+x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 9. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x+4\right)\sqrt{x^2+4}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2x^2+4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}, y'=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{x\left(x+4\right)}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{2x^2+4x+4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Bài 10. Tính đạo hàm hàm số $y=\sqrt{3x+1}-\dfrac{5}{x^2+2}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}+\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$

Lời giải

Với mọi

$x>-\dfrac{1}{3}, y'=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}-\dfrac{5.\left(-2x\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}+\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Bài 11. Cho hàm số $g\left(x\right)=\left(-6x^2+96\right)^{2015}$. Tính $g'\left(0\right)$. **ĐS.** $g'\left(0\right)=0$.

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}, g'\left(x\right)=2015\left(-6x^2+96\right)^{2014}\left(-12x\right)$. Suy ra $g'\left(0\right)=0$.

Bài 12. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x-2\right)\sqrt{x^2+1}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Ta có $y'=\left(x-2\right)'\sqrt{x^2+1}+\left(x-2\right)\left[\sqrt{x^2+1}\right]'=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Bài 13. Tính đạo hàm y' của hàm số $y=\sqrt{x^2-6x+8}$ và giải phương trình $y'=0$.

ĐS. $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Lời giải

Điều kiện. $x^2-6x+8\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 4. \end{array}\right.$

Ta có $y'=\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}=0 \Leftrightarrow x=3$ (loại).

Vậy Phương trình $y'=0$ vô nghiệm.

Bài 14. Cho $f(x)=x^3-2x^2-6x+2$. Giải bất phương trình. $f'(x)\ge 2$.

ĐS. $S=\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-4x-6$.

Khi đó $f'(x)\ge 2 \Leftrightarrow 3x^2-4x-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -\dfrac{2}{3} \\ x\ge 2. \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

Bài 15. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\left(x^3+7x\right)\left(2x-\dfrac{4}{x}\right)$. **ĐS.** $y'=8x^3+20x$

Lời giải

Ta có $y'=\left(3x^2+7\right)\left(2x-\dfrac{4}{x}\right)+\left(x^3+7x\right)\left(2+\dfrac{4}{x^2}\right)=8x^3+20x$.

Bài 16. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\dfrac{-x^2-3}{x^3+4x+2}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{x^4+5x^2-4x+12}{\left(x^3+4x+2\right)^2}$.

Lời giải

Ta có. $y'=\dfrac{-2x\left(x^3+4x+2\right)-\left(-x^2-3\right)\left(3x^2+4\right)}{\left(x^3+4x+2\right)^2}=\dfrac{x^4+5x^2-4x+12}{\left(x^3+4x+2\right)^2}$

Bài 17. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\dfrac{3x^2-x+1}{x+5}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{3\left(x^2+10x-2\right)}{\left(x+5\right)^2}$.

Lời giải

Tập xác định. $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(6x-1)(x+5)-\left(3x^2-x+1\right)}{(x+5)^2}=\dfrac{3\left(x^2+10x-2\right)}{(x+5)^2}$.

Bài 18. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=(4-5x)(-2x+1)$. **ĐS.** $y'=20x-13$

Lời giải

Ta có $y=10x^2-13x+4$.

Khi đó $y'=20x-13$.

Bài 19. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2-x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$

Lời giải

$$y'=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-(x+1).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\dfrac{x^2+2-\left(x^2+x\right)}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2-x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+2}}$$

Bài 20. Cho hàm số $y=\dfrac{2-3x}{x^2-x+1}$. Tính $y'(1)$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-3\left(x^2-x+1\right)-(2-3x)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{3x^2-4x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

Khi đó, $y'(1)=\dfrac{-2}{1}=-2.$

Vậy $y'(1)=-2.$

Bài 21. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(2x+1)^{13}$.

ĐS. $y'=(2x+1)^2\left(10x^2-14x+16\right)$.

Lời giải

$$f'(x)=(2x-2)(2x+1)^3+\left(x^2-2x+3\right).3(2x+1)^2.2$$
$$=(2x+1)^2\left[(2x-2)(2x+1)+6\left(x^2-2x+3\right)\right]$$
$$=(2x+1)^2\left(10x^2-14x+16\right).$$

Bài 22. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$. **ĐS.** $y'=1$.

Lời giải

Với $x=-1$. Hàm số đã cho không có đạo hàm.

Với $x\neq-1, y=x+2$. Khi đố, $y'=1$.

Bài 23. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{50x+15}{40-x}$. Tính $A=\dfrac{f'(39)}{2015}-\dfrac{1}{2}.f''(41)$.

ĐS. $A=-2014$

Lời giải

Ta có. $y'(x)=\dfrac{2015}{(4-x)^2}\Rightarrow f'(39)=2015.$

$f''(x)=\dfrac{-4030}{(40-x)^3}\Rightarrow f''(41)=4030.$

Khi đó, $A=1-2015=-2014.$

Bài 24. Tính đạo hàm của hàm số $y=3x^5-\dfrac{4}{x^3}+(2x+1)\sqrt{x}$ **ĐS.** $15x^4+\dfrac{12x^2}{x^6}+2\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}}$

Lời giải

Ta có.

$$y' = \left(3x^5\right)' - \left(\frac{4}{3}\right)' + \left(\left(2x+1\right)\sqrt{x}\right)'$$
$$= 15x^4 + \frac{4}{x^6}.\left(x^3\right)' + \left(2x+1\right)'\sqrt{x} + \left(2x+1\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$
$$= 15x^4 + \frac{12x^2}{x^6} + 2\sqrt{x} + \frac{\left(2x+1\right)}{2\sqrt{x}}.$$

Bài 25. Tính đạo hàm của hàm số sau.

1. $y = 2x^3 - 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} - 1$ **ĐS.** $6x^2 - \frac{4}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$

2. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+5}$ **ĐS.** $\frac{x^2 + 10x - 7}{\left(x+5\right)^2}$

Lời giải

1. $y' = 6x^2 - \frac{4}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}.$

2.

$$y' = \frac{\left(x^2 - 2x - 3\right)'\left(x+5\right) - \left(x+5\right)'\left(x^2 - 2x - 3\right)}{\left(x+5\right)^2} = \frac{\left(2x-2\right)\left(x+5\right) - \left(x^2 - 2x - 3\right)}{\left(x+5\right)^2} = \frac{x^2 + 10x - 7}{\left(x+5\right)^2}.$$

Bài 26. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

1. $y = \left(2x^3 + 2\right)\left(x^2 + 1\right).$ **ĐS.** $10x^4 + 6x^2 + 4x$

2. $y = \frac{5 - 3x - x^2}{x - 2}.$ **ĐS.** $\frac{-x^2 + 4x + 1}{\left(x-2\right)^2}$

Lời giải

1. $y' = \left(2x^3 + 2\right)'\left(x^2 + 1\right) + \left(x^2 + 1\right)'\left(2x^3 + 2\right) = 6x^2\left(x^2 + 1\right) + 2x\left(2x^3 + 2\right)$

$= 6x^4 + 6x^2 + 4x^4 + 4x = 10x^4 + 6x^2 + 4x$

2. $y' = \frac{\left(5 - 3x - x^2\right)'\left(x-2\right) - \left(x-2\right)'\left(5 - 3x - x^2\right)}{\left(x-2\right)^2} = \frac{\left(-3 - 2x\right)\left(x-2\right) - \left(5 - 3x - x^2\right)}{\left(x-2\right)^2}$

$= \frac{-x^2 + 4x + 1}{\left(x-2\right)^2}$

Bài 27. Tính đạo hàm của các hàm số sau $y = \frac{x\sqrt{x}}{x^2 - 1}.$ **ĐS.** $\frac{-x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$

Lời giải

Ta có.

$$y' = \frac{\left(x\sqrt{x}\right)'\left(x^2 - 1\right) - \left(x\sqrt{x}\right)\left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{\frac{3\sqrt{x}}{2}\left(x^2 - 1\right) - 2x^2\sqrt{x}}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-\frac{x\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-x^2\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{\left(x^2 - 1\right)^2}.$$

Bài 28. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

1. $y = \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{2015}.$ **ĐS.** $2015\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{2014}.\frac{1}{\left(3x+1\right)^2}$

2. $y=(1-x)\sqrt{x^2-2x+5}.$ **ĐS.** $-\dfrac{2x^2-4x+6}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

Lời giải

1. $y'=2015\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{2014}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)'=2015\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{2014}\dfrac{-1}{(3x+1)^2}.$

2. $y'=(1-x)'\sqrt{x^2-2x+5}-(1-x)\sqrt{x^2-2x+5}'$

$=-\sqrt{x^2-2x+5}+(1-x)\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=-\dfrac{2x^2-4x+6}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

Bài 29. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

1. $y=\dfrac{5}{4}x^4+\dfrac{4}{3}x^3-x-5.$ **ĐS.** $5x^3+4x^2-1$

2. $y=\dfrac{2x^2-5x+1}{x+2}.$ **ĐS.** $\dfrac{2x^2+8x-11}{(x+2)^2}$

3. $y=\left(-3x^2+3x-7\right)^{15}.$ **ĐS.** $-45(2x-1)\left(-3x^2+3x-7\right)^{14}$

4. $y=(x-5)\sqrt{x^2+2x-1}.$ **ĐS.** $\dfrac{2x^2-2x-6}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

Lời giải

1. $y'=5x^3+4x^2-1.$

2. $y'=\dfrac{\left(2x^2-5x+1\right)'(x+2)-\left(2x^2-5x+1\right)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{(4x-5)(x+2)-\left(2x^2-5x+1\right)}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+8x-11}{(x+2)^2}$

3. $y'=15\left(-3x^2+3x-7\right)^{14}.\left(-3x^2+3x-7\right)'=-45(2x-1)\left(-3x^2+3x-7\right)^{14}.$

4. $y'=\sqrt{x^2+2x-1}+(x-5).\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\dfrac{2x^2-2x-6}{\sqrt{x^2+2x-1}}.$

Bài 30. Cho hàm số $y=x^3-4x^2+5x.$ Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $y'>0.$

ĐS. $x>\dfrac{5}{3}$ hoặc $x<1$

Lời giải

Ta có. $y'=3x^2-8x+5.$

Khi đó $y'>0\Leftrightarrow 3x^2-8x+5\Leftrightarrow$ $x>\dfrac{5}{3}$ hoặc $x<1.$

Bài 31. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x+5}}.$ **ĐS.** $y'=\dfrac{-11x+21}{\left(x^2-6x+5\right)\sqrt{x^2-6x+5}}$

Lời giải

Với mọi

$$x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty),\ y'=\frac{3\sqrt{x^2-6x+5}-\dfrac{(2x-6)}{2\sqrt{x^2-6x+5}}.(3x+2)}{\left(\sqrt{x^2-6x+5}\right)^2}=\frac{-11x+21}{\left(x^2-6x+5\right)\sqrt{x^2-6x+5}}$$

Bài 32. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-1}-2x$. Giải phương trình $f'(x)=0$. **ĐS.** $S=\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

Lời giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}-2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\\2\sqrt{x^2-1}=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\\x\ge 0\\x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Bài 33. Giải bất phương trình $y'\ge 0$ biết $y=x-2+\dfrac{4}{x^2}$. **ĐS.** $S=(-\infty;0)\cup[2;+\infty)$

Lời giải

Ta có $y'=1-\dfrac{8}{x^3}$.

Điều kiện $x\ne 0$.

Do đó $y'\ge 0\Leftrightarrow 1-\dfrac{8}{x^3}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x^3-8}{x^3}\ge 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\dfrac{x^3-8}{x^3}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có. $x\in(-\infty;0)\cup[2;+\infty)$.

Vậy $S=(-\infty;0)\cup[2;+\infty)$

Bài 34. Giải bất phương trình $y'\le 0$ biết $y=(x-1)\sqrt{2x+1}$. **ĐS.** $S=\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$

Lời giải

Ta có $y'=(x-1)'\sqrt{2x+1}+(x-1)\left[\sqrt{2x+1}\right]'=\sqrt{2x+1}+\dfrac{(x-1)}{\sqrt{2x+1}}=\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x+1}}$.

Khi đó $y'\le 0\Leftrightarrow\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x+1}}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2\le 0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{2}{3}\\x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$.

Vậy $S=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right]$

Bài 35. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\left(2-x^3\right)(x+1)^2$. **ĐS.** $y'=-5x^4-8x^3-3x^2+4x+4$.

Lời giải

Ta có $y=\left(2-x^3\right)\left(x+1\right)^2=-x^5-2x^4-x^3+2x^2+4x+2$.

Bài 36. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\dfrac{2x^3+x^2-3x+1}{x^2+x+1}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2x^4+4x^3+10x^2-4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Lời giải

Tập xác định. $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{\left(6x^2+2x-3\right)\left(x^2+x+1\right)+\left(2x^3+x^2-3x+1\right)\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{2x^4+4x^3+10x^2-4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Bài 37. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x-\sqrt{12x-x^3}$. Tính y' và giải phương trình $y'=0$.

ĐS. $y'=x^2-2-\dfrac{12-6x^2}{2\sqrt{12x-2x^3}}=x^2-2-\dfrac{6-3x^2}{\sqrt{12x-2x^3}}, x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$.

Lời giải

$y'=x^2-2-\dfrac{12-6x^2}{2\sqrt{12x-2x^3}}=x^2-2-\dfrac{6-3x^2}{\sqrt{12x-2x^3}}$.

Điều kiện. $12x-2x^3\geq 0$.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow x^2-2-\dfrac{6-3x^2}{\sqrt{12x-2x^3}}=0\Leftrightarrow x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.$

So sánh điều kiện, hai giá trị x đều thỏa mãn.

Vậy $x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$

Bài 38. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y=x^4-x^2+3$ tại điểm có hoành độ là -1.

ĐS. $y=-2x+1$

Lời giải

Ta có. $y'=4x^3-2x$.

$x_0=-1\Rightarrow y_0=3; y'\left(x_0\right)=y'\left(-1\right)=-2$

Suy ra PTTT: $y=-2\left(x+1\right)+3=-2x+1$.

Bài 39. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-4x+3$. **ĐS.** $y=-4x-1$; $y=-4x+7$

Lời giải

Với mọi $x\neq\dfrac{1}{2}$, $y'=\dfrac{-4}{\left(2x-1\right)^2}$.

Gọi $A\left(a;\dfrac{2a+1}{2a-1}\right)$ là tiếp điểm.

Ta có. $y'\left(a\right)=-4\Leftrightarrow\left(2a-1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=1\end{array}\right.$.

- $a=0$. Suy ra $A\left(0;-1\right)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là

$y-\left(-1\right)=-4\left(x-0\right)\Leftrightarrow y=-4x-1$ (nhận).

- $a=1$. Suy ra $A\left(1;3\right)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y-3=-4\left(x-1\right)\Leftrightarrow y=-4x+7$ (nhận).

Bài 40. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=3x+2$. **ĐS.** $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$; $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Gọi $A\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến của (C) tại A vuông góc với d khi và chỉ khi $y'(a).3=-1\Leftrightarrow \dfrac{-3}{(a-1)^2}.3=-1\Leftrightarrow (a-1)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4\\ a=-2\end{array}\right.$.

$a=-2$. Khi đó, $A(-2;0)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

$a=4$. Khi đó, $A(4;2)$ và phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{10}{3}$.

Bài 41. Cho đường cong $(C): y=f(x)=-4x^3-3x^2+5x-7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $d: y=-x$. **ĐS.** $y=-x-12$; $y=-x-\dfrac{21}{4}$.

Lời giải

Ta có $y'=-12x^2-6x+5$.

Gọi $M(a;b)\in(C)$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k=-12a^2-6a+5$. Do tiếp tuyến của (C) song song với $d: y=-x$ nên ta có

$$-12a^2-6a+5=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1\Rightarrow b=-11\\ a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=-\dfrac{23}{4}\end{array}\right..$$

$*$ Tại $M(-1;-11)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-(x+1)-11\Leftrightarrow y=-x-12.$$

$*$ Tại $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{23}{4}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{23}{4}\Leftrightarrow y=-x-\dfrac{21}{4}.$$

Kết luận. Có hai tiếp tuyến là $y=-x-11$ và $y=-x-\dfrac{21}{4}$.

Bài 42. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-5x^2+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với $d: y=-3x-7$. **ĐS.** $y=-3x+\dfrac{67}{27}$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-10x$.

Gọi $M(a;b)\in(C)$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k=3a^2-10a$.

Do tiếp tuyến của (C) song song với $d: y=-3x-7$ nên ta có

$$3a^2-10a=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \Rightarrow b=-16 \\ a=\dfrac{1}{3} \Rightarrow b=\dfrac{40}{27} \end{array}\right..$$

$*$ Tại $M(3;-16)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-3(x-3)-16 \Leftrightarrow y=-3x-7 \text{ (loại).}$$

$*$ Tại $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{40}{27}\right)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{40}{27} \Leftrightarrow y=-3x+\frac{67}{27}.$$

Kết luận. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-3x+\dfrac{67}{27}$.

Bài 43. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta): x+3y+1=0$.

ĐS. $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$; $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(a;b)\in(C)$ với $a\neq 1$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k=\dfrac{-3}{(a-1)^2}$.

Do tiếp tuyến của (C) song song với $(\Delta): x+3y+1=0$ nên ta có

$$\frac{-3}{(a-1)^2}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow (a-1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \Rightarrow b=3 \\ a=-2 \Rightarrow b=1 \end{array}\right..$$

$*$ Tại $M(4;3)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-\frac{1}{3}(x-4)+3 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}.$$

$*$ Tại $M(-2;1)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$y=-\frac{1}{3}(x+2)+1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

Kết luận. Có hai tiếp tuyến là $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$ và $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

Bài 44. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-5x^2+2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x+y+7=0$.

ĐS. $y=-3x+\dfrac{67}{27}$.

Lời giải

$y'=3x^2-10x$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x+y+7=0$ hay $y=-3x-7$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng -3.

Ta có. $y'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2-10x_0=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với $x_0=3$ thì $y_0=-16$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3;-16)$ là. $y=-3(x-3)-16$ hay $y=-3x-7$ (loại).

Với $x_0=\frac{1}{2}$ thì $y_0=\frac{40}{27}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(\frac{1}{3};\frac{40}{27}\right)$ là. $y=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{40}{27}$ hay $y=-3x+\frac{67}{27}$.

Vậy $y=-3x+\frac{67}{27}$.

Bài 45. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{-x+2}(C)$. Viết phuwong trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x-y-14=0$. **ĐS.** $y=3x-2$.

Lời giải

$y'=\frac{3}{(-x+2)^2}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x-y-14=0$ hay $y=3x-14$ nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng 3.

Ta có. $y'(x_0)=3 \Leftrightarrow \frac{3}{(-x_0+2)^2}=3 \Leftrightarrow (-x_0+2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x_0+2=1 \\ -x_0+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$.

Với $x_0=1$ thì $y_0=1$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;1)$ là. $y=3(x-1)+1$ hay $y=3x-2$.

Với $x_0=3$ thì $y_0=-5$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3;-5)$ là. $y=3(x-3)-5$ hay $y=3x-14$ (loại).

Vậy $y=3x-2$.

Bài 46. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-3x+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) biết d vuông góc với đường thẳng $\Delta: x-3y-3=0$. **ĐS.** $y=-3x+2$, $y=-3x+6$.

Lời giải

Vì tiếp tuyến d vuông góc với $\Delta: x-3y-3=0$ hay $y=\frac{1}{3}x-1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -3.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có. $y'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2+6x_0=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=0 \end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ thì $y_0=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(0;2)$ là. $y=-3x+2$.

Với $x_0=2$ thì $y_0=0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(2;0)$ là. $y=-3(x-2)$ hay $y=-3x+6$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề **Câu** là $y=-3x+2$, $y=-3x+6$.

Bài 47. Cho hàm số $y=x^3+2x^2-1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: x+y-3=0$. **ĐS.** $y=-x-1$, $y=-x-\frac{31}{27}$.

Lời giải

Vì tiếp tuyến song song với $d: x+y-3=0$ hay $y=-x+3$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -1.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có. $y'(x_0)=-1 \Leftrightarrow 3x_0^2+4x_0+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với $x_0=-1$ thì $y_0=0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(-1;0)$ là. $y=-(x+1)$.

Với $x_0=-\frac{1}{3}$ thì $y_0=-\frac{22}{27}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A\left(-\frac{1}{3};-\frac{22}{27}\right)$ là. $y=-\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{22}{27}$ hay $y=-x-\frac{31}{27}$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề **Câu** là $y=-x-1$, $y=-x-\frac{31}{27}$.

Bài 48. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{1-3x}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x-7y-1=0$. **ĐS.** $y=-7x-3$ và $y=-7x-31$.

Lời giải

Ta có. $y'=-\frac{7}{(x+2)^2}$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với $d: x-7y-1=0$ hay $y=\frac{1}{7}x-\frac{1}{7}$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng -7.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có. $y'(x_0)=-7 \Leftrightarrow -\frac{7}{(x_0+2)^2}=-7 \Leftrightarrow (x_0+2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \\ x_0=-3 \end{array}\right.$.

Với $x_0=-1$ thì $y_0=4$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(-1;4)$ là. $y=-7(x+1)+4$ hay $y=-7x-3$.

Với $x_0=-3$ thì $y_0=-10$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $B(-3;-10)$ là. $y=-7(x+3)-10$ hay $y=-7x-31$. Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề **Câu** là $y=-7x-3$ và $y=-7x-31$.

Bài 49. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $C: y=f(x)=\frac{x-2}{x-1}$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=x+2$. **ĐS.** $y=x-2$.

Lời giải

Ta có. $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

Vì tiếp tuyến song song với $d: y = x + 2$ nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có. $y'(x_0) = -7 \Leftrightarrow -\frac{7}{(x_0+2)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$.

Với $x_0 = 2$ thì $y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $A(2;0)$ là. $y = x - 2$.

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $B(0;2)$ là. $y = x + 2$ (loại).

Vậy $y = x - 2$.

Bài 50. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 + x^2 - 4x - 2$ tại giao điểm của đồ thị với đường thẳng $x = 1$. **ĐS.** $y = x - 5$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2x - 4$.

Gọi M là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $x = 1$. Suy ra tọa độ $M(1; -4)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm M là $k = y'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$y = x - 1 - 4 \Leftrightarrow y = x - 5.$$

Kết luận. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = x - 5$.

Bài 51. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tạo với trục Ox, Oy tam giác vuông cân tại O. Viết phương trình tiếp tuyến đó. **ĐS.** $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$; $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi $M\left(a; \frac{a-1}{a+1}\right) \in (C)$ với $a \neq -1$.

Vì ΔOAB vuông cân tại O nên tiếp tuyến tại điểm $M\left(a; \frac{a-1}{a+1}\right) \in (C)$ phải song song với đường phân giác $y = x$ hoặc $y = -x$. Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M bằng 1 hoặc -1. Khi đó

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{(a+1)^2} = 1 \\ \frac{2}{(a+1)^2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a+1)^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 + \sqrt{2} \\ a = -1 - \sqrt{2} \end{array}\right..$$

$*$ Với $a = -1 + \sqrt{2}$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$.

$*$ Với $a = -1 - \sqrt{2}$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$.

Kết luận. Có hai tiếp tuyến là $y = x + 2 - 2\sqrt{2}$ và $y = x + 2 + 2\sqrt{2}$.

Bài 52. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$. **ĐS.** $y' = x^2 \cos x$

Lời giải

Ta có $y = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$

Suy ra $y'=\left(x^2-2\right)'.\sin x+\left(x^2-2\right)\left(\sin x\right)'+\left(2x\right)'.\cos x+2x.\left(\cos x\right)'$

$=2x\sin x+\left(x^2-2\right)\cos x+2\cos x-2x\sin x=x^2\cos x$.

Bài 53. Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sin 2x$. **ĐS.** $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$

Lời giải

Với mọi giá trị thực của x, $y'=\sin 2x+2x\cos 2x$.

Bài 54. Tính đạo hàm hàm số $y=\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{4}\cos 4x$. **ĐS.** $y'=2\sin 4x$

Lời giải

Với mọi $x\in\mathbb{R}$,

$y'=\frac{1}{2}.2.\sin 2x.\left(\sin 2x\right)'-\frac{1}{4}.4.\left(-\sin 4x\right)=\frac{1}{2}.2.\sin 2x.2.\cos 2x-\frac{1}{4}.4.\left(-\sin 4x\right)$

$\sin 4x+\sin 4x=2\sin 4x$.

Bài 55. Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(3-2\tan^2 x\right)^3$. **ĐS.** $y'=-12\tan x\left(3-2\tan^2 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)$

Lời giải

Ta có . $y'=3\left(3-2\tan^2 x\right)^2\left(3-2\tan^2 x\right)'=-12\tan x\left(3-2\tan^2 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)$..

Bài 56. Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^3\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. **ĐS.** $y'=6\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Lời giải

Ta có $y=\tan^3\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $y'=3\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left[\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]'=6\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Bài 57. Tính đạo hàm y' của hàm số $y=\frac{\sin x}{x^2}$. **ĐS.** $y'=\frac{x\cos x-2\cos x}{x^3}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=\frac{\cos x.x^2-2x\cos x}{x^4}=\frac{x\cos x-2\cos x}{x^3}$.

Bài 58. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\tan\left(\frac{x+1}{x+3}\right)$. **ĐS.** $y'=\frac{2}{(x+3)^2\cos^2\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$

Lời giải

Điều kiện. $\begin{cases} x\neq -3 \\ \frac{x+1}{x+3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{cases}$.

Ta có $y'=\frac{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}=\frac{\frac{2}{(x+3)^2}}{\cos^2\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}=\frac{2}{(x+3)^2\cos^2\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}$.

Bài 59. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$

Lời giải

Tập xác định. $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\cos\sqrt{1+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$.

Bài 60. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y=\dfrac{\sin x}{\sin x-\cos x}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{-1}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{\cos x(\sin x-\cos x)-\sin x(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\dfrac{-1}{(\sin x-\cos x)^2}$.

Bài 61. Tính đạo hàm của hàm số $\tan\dfrac{x}{x^2+1}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{x^2+1}}.\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Lời giải

$$y'=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{x^2+1}}.\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{x^2+1}}.\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{x^2+1}}.\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Bài 62. Cho hàm số $y=f(x)=\cos^3\sqrt{3x^2-2\pi x}$. Tính $f'(\pi)$. **ĐS.** $f'(\pi)=0$.

Lời giải

$$f'(x)=-3\cos^2\sqrt{3x^2-2\pi x}.\sin\sqrt{3x^2-2\pi x}.\left(\sqrt{3x^2-2\pi x}\right)'$$

$$=-3\cos^2\sqrt{3x^2-2\pi x}.\sin\sqrt{3x^2-2\pi x}.\frac{6x-2\pi}{2\sqrt{3x^2-2\pi x}}$$

Vậy $f'(\pi)=-3\cos^2\pi.\sin\pi.\dfrac{4\pi}{2\pi}=0$.

Bài 63. Cho hàm số $y=\sin 2x-\cot\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Tính $y'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$. **ĐS.** $y'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $y'=2\cos 2x+\dfrac{1}{\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Khi đó, $y'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

Bài 64. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\sqrt{x^2+1}$. **ĐS.** $y'=\cos\sqrt{x^2+1}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

$$y'=\cos\sqrt{x^2+1}.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\cos\sqrt{x^2+1}.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Bài 65. Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos^2\sqrt{1-3x}$. **ĐS.** $-\dfrac{3\sin 2\sqrt{1-3x}}{2\sqrt{1-3x}}$

Lời giải

Ta có

$$y'=\left(\cos^2\sqrt{1-3x}\right)'=2\cos\sqrt{1-3x}.\left(\cos\sqrt{1-3x}\right)'=-2\cos\sqrt{1-3x}.\sin\sqrt{1-3x}.\left(\sqrt{1-3x}\right)'$$

$$=-2\cos\sqrt{1-3x}.\sin\sqrt{1-3x}.\frac{1}{2\sqrt{1-3x}}(1-3x)'=-\frac{3\sin 2\sqrt{1-3x}}{2\sqrt{1-3x}}$$

Bài 66. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=\left(4x^2-3\right)\cos x$ **ĐS.** $8x\cos x-\left(4x^2-3\right)\sin x$
2. $y=\left(4-\sin^2 3x\right)^5$ **ĐS.** $-15\left(4-\sin^2 3x\right)^4.\sin 6x$

Lời giải

1. $y'=\left(4x^2-3\right)'\cos x+\left(4x^2-3\right)(\cos x)'=8x\cos x-\left(4x^2-3\right)\sin x$.
2.

$$y'=5\left(4-\sin^2 3x\right)^4.\left(4-\sin^2 3x\right)'=-5\left(4-\sin^2 3x\right)^4.2.\sin 3x.3\cos 3x=-15\left(4-\sin^2 3x\right)^4.\sin 6x$$

Bài 67. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+\sin 2x}{1-\cos 2x}$. **ĐS.** $\dfrac{-4x\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}$

Lời giải

Ta có

$$y'=\frac{(2x+\sin 2x)'(1-\cos 2x)-(2x+\sin 2x)(1-\cos 2x)'}{(1-\cos 2x)^2}$$

$$=\frac{(2+2\cos 2x)(1-\cos 2x)-2\sin 2x(2x+\sin 2x)}{(1-\cos 2x)^2}=\frac{-4x\sin 2x}{(1-\cos 2x)^2}.$$

Bài 68. Tính đạo hàm của các hàm số sau

1. $y=(5\sin x-3)(3\cos x-1)$. **ĐS.** $15\cos 2x-5\cos x+9\sin x$
2. $y=\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}$ **ĐS.** $\cos 2x$

Lời giải

1. $y'=5\cos x(3\cos x-1)-3\sin x(5\sin x-3)=15\cos 2x-5\cos x+9\sin x$.
2. $y=\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}=\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow y'=\cos 2x$.

Bài 69. Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan x\left(\cos x+\cot^2 x\right)$. **ĐS.** $y'=\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Lời giải

Với mọi $x\neq\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$, ta có $y=\sin x+\cot x$.

Do đó, $y'=\cos x-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Bài 70. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$. **ĐS.** $y'=\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$

Lời giải

Với mọi $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$, $y' = \frac{\left(\sin x + \cos x\right)^2 + \left(\sin x - \cos x\right)^2}{\left(\sin x + \cos x\right)^2} = \frac{2}{\left(\sin x + \cos x\right)^2}$.

Bài 71. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$. **ĐS.** $y' = \frac{2\sin 2x}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2}$

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$y' = \frac{2\sin x\cos x\left(1 + \cos^2 x\right) + 2\cos x\sin x.\sin^2 x}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2} = \frac{2\sin x\cos x\left(1 + \sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2} = \frac{2\sin 2x}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2}$$

Bài 72. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$. **ĐS.** $y' = \frac{-2\sin x}{\left(1 + \sin^2 x\right)\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

Lời giải

$$y' = \frac{-\sin x.\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x.\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin x\left(1 + \sin^2 x\right) - \cos^2 x\sin x}{\left(1 + \sin^2 x\right)\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

$$= \frac{-\sin x\left(1 + \sin^2 x\right) - \left(1 - \sin^2 x\right)\sin x}{\left(1 + \sin^2 x\right)\sqrt{1 + \sin^2 x}} = \frac{-2\sin x}{\left(1 + \sin^2 x\right)\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Bài 73. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y = x\sin^3\left(2x + 1\right)$.

ĐS. $y' = \sin^2\left(2x + 1\right)\left(\sin\left(2x + 1\right) + 6x\cos\left(2x + 1\right)\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = \sin^3\left(2x + 1\right) + 6x\sin^2\left(2x + 1\right)\cos\left(2x + 1\right) = \sin^2\left(2x + 1\right)\left(\sin\left(2x + 1\right) + 6x\cos\left(2x + 1\right)\right)$.

Bài 74. Tính đạo hàm của hàm số sau. $y = \cos\left(x + 1\right)^3$. **ĐS.** $y' = -3\left(x + 1\right)^2\sin\left(x + 1\right)^3$.

Lời giải

Ta có $y' = -\left(\left(x + 1\right)^3\right)'\sin\left(x + 1\right)^3 = -3\left(x + 1\right)^2\sin\left(x + 1\right)^3$.

Bài 75. Tính đạo hàm của hàm số. $y = \frac{\tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$. **ĐS.** $y' = \frac{2\left(1 + \tan^2 2x\right)^2}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{\left(\tan 2x\right)'\left(1 - \tan^2 2x\right) - \tan 2x\left(1 - \tan^2 2x\right)'}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2}$

$$= \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}\left(1 - \tan^2 2x\right) - \tan 2x\left(-2\tan 2x\frac{2}{\cos^2 2x}\right)}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(1 + \tan^2 2x\right)\left(1 - \tan^2 2x\right) + 4\tan^2 2x\left(1 + \tan^2 2x\right)}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2} = \frac{2 - 2\tan^4 2x + 4\tan^2 2x + 4\tan^4 2x}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(1 + \tan^2 2x\right)^2}{\left(1 - \tan^2 2x\right)^2}.$$

Bài 76. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}$. Tính y' và chứng minh $y'-\tan^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

ĐS. $y'=1+\tan^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

$$y'=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x)-(\sin x-\cos x)(-\sin x+\cos x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{2}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{2}{\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}=\frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=1+\tan^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Từ đó suy ra, $y'-\tan^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ (đpcm).

Bài 77. Cho hàm số $y=\sin 2x+\cos 2x+12$. Tính y' và giải phương tình $y'=2$.

ĐS. $y'=-2\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $x=k\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải

Ta có $y'=2\cos 2x-2\sin 2x=-2\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lại có

$$y'=2\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$$

Bài 78. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos x}$. Chứng minh rằng $y'=\cos x-\cos 2x$.

Lời giải

Với mọi $x\neq\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$,

$$y'=\frac{3\sin^2 x\cos x(1+\cos x)+\sin x.\sin^3 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x\left[3\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x\right]}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)\left(2\cos^2 x+3\cos x+1\right)}{(1+\cos x)^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)^2(2\cos x+1)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=(1-\cos x)(2\cos x+1)=\cos x-\left(2\cos^2 x-1\right)=\cos x-\cos 2x$$

Bài 79. Cho hàm số $y=f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}$. Chứng minh. $100y=y''\left(1+x^2\right)+y'x$.

Lời giải

$$y'=10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^9\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^9.\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow y'\sqrt{1+x^2}=10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}$$

Đạo hàm hai vế, ta được $y''\sqrt{1+x^2}+y'\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=100\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^9.\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Leftrightarrow y''\left(1+x^2\right)+y'x=100y \text{ (đpcm).}$$

Bài 80. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+4}$. Chứng minh. $2\left(y'\right)^2=\left(y-1\right).y''$.

Lời giải

$$y'=\frac{7}{\left(x+4\right)^2}$$

$$y''=-\frac{14\left(x+4\right)}{\left(x+4\right)^4}=-\frac{14}{\left(x+4\right)^3}.$$

Ta có. $2\left(y'\right)^2=\dfrac{98}{\left(x+4\right)^4}$.

$$\left(y-1\right)y''=\left(\frac{x-3}{x+4}-1\right).\frac{-14}{\left(x+4\right)^3}=\frac{-7}{x+4}.\frac{-14}{\left(x+4\right)^3}=\frac{98}{\left(x+4\right)^4}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 81. Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Chứng minh rằng $2y+y'\tan x+y''-2=0$.

Lời giải

Ta có $y'=2\sin x\left(\sin x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

Và $y''=\left(\sin 2x\right)'=2\cos 2x=2\cos^2 x-2\sin^2 x$. Do đó

$$2y+y'\tan x+y''-2=2\sin^2 x+2\sin x\cos x.\frac{\sin x}{\cos x}+2\cos^2 x-2\sin^2 x-2$$

$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x-2=0$$

Bài 82. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh rằng $xy-2\left(y'-\sin x\right)+xy''=0$.

Lời giải

Ta có $y'=\sin x+x\cos x\Rightarrow y''=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$.

Khi đó $xy-2\left(y'-\sin x\right)+xy''=x^2\sin x-2\left(\sin x+x\cos x-\sin x\right)+2x\cos x-x^2\sin x=0$.

Bài 83. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+2x}$. Chứng minh rằng $y.y'+y^3.y''=x$.

Lời giải

Tập xác định. $D=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $y'=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

$$\text{Khi đó } y''=\frac{\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2+2x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}\left(x^2+2x\right)}.$$

$$\text{Vậy } y.y'+y^3.y''=\sqrt{x^2+2x}.\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}+\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^3.\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}\left(x^2+2x\right)}=x+1-1=x.$$

Bài 84. Cho hàm số $y=\sin^2 x+(m+1)\sin x+\dfrac{m}{\pi}x^2+2019$ với m là tham số thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh phương trình $y'=0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Lời giải

Tập xác định. $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=2\sin x\cos x+(m+1)\cos x+\dfrac{2mx}{\pi}$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $m=0$ ta có

$$y'=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Trường hợp 2. $m\neq 0$ ta có $y'(-\dfrac{\pi}{2})=-m$; $y'(\dfrac{\pi}{2})=m$.

Khi đó $y'(-\dfrac{\pi}{2}).y'(\dfrac{\pi}{2})=-m^2<0$, $\forall m\neq 0$ nên phương trình $y'=0$ luôn có nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ với mọi $m\neq 0$.

Kết luận. Vậy phương trình $y'=0$ luôn có nghiệm với mọi m.